Geo 1 - mod B - 27/03/2024

Note Title

Scriverò spesso $\mathbb{E}^n$ per indicare $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$

Siano $\mathbb{L}, \mathbb{M}$ sottosp. affini in $\mathbb{E}^n$

$\mathbb{L} = P + W$
$\mathbb{M} = Q + U$
$U, W \leq \mathbb{R}^n$
$P, Q \in \mathbb{E}^n$

$$d(\mathbb{L}, \mathbb{M}) := \inf \{ d(P', Q'),\ P' \in \mathbb{L},\ Q' \in \mathbb{M} \} \geq 0$$

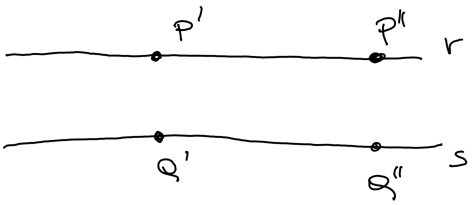
$$P' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$d(P', Q') := \| P' - Q' \| = \sqrt{(P'-Q')(P'-Q')} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

2 casi possibili:

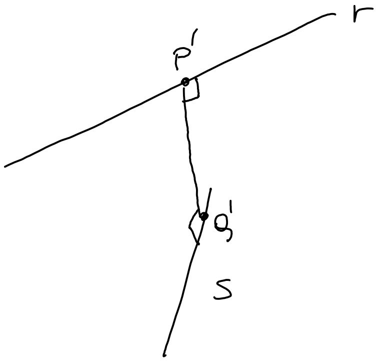
- $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ e in tal caso $d(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = 0$ (posso prendere $P' = Q' \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$)
- $\boxed{\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset}$

Es.:



(P', Q') coppia di p.ti di minima distanza tra r e s rette parallele non è unica.

Es.: $\mathbb{E}^3$



se r, s sghembe c'è solo una coppia di p.ti di minima dist. e sarà tale che $P' - Q'$ sia vettore $\perp$ sia ad r sia ad s.

Caso generale:

a) Dimostriamo che se $P' \in \mathbb{L}$ e $Q' \in \mathbb{M}$ sono t.c. $P' - Q'$ è $\perp$ ad $\mathbb{L}$ (ossia ad ogni vettore di W) ed è $\perp$ a $\mathbb{M}$ (ad ogni vettore di U) allora $d(P'', Q'') \geq d(P', Q')$ $\forall\, P'' \in \mathbb{L}$ e $Q'' \in \mathbb{M}$

e dunque $d(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = d(P', Q')$

$\mathbb{L} \ni P'' = P' + w \qquad \exists\, w \in W$

$\mathbb{M} \ni Q'' = Q' + u \qquad \exists\, u \in U$

$d(P'', Q'') := \| P'' - Q'' \| = \| P' - Q' + w - u \| =$

(ricordo $P' - Q' \perp w$ ed è $\perp$ a $-u \Rightarrow P' - Q'$ è $\perp$ $w-u$).

$$= \sqrt{((P'-Q') + (w-u)) \cdot ((P'-Q') + (w-u))} = \sqrt{(P'-Q')\cdot(P'-Q') + (w-u)(w-u)}$$

$$= \sqrt{\|P'-Q'\|^2 + \|w-u\|^2} \geq \sqrt{\|P'-Q'\|^2} = d(P', Q')$$

b) Mostriamo ora che esistono $\underset{\mathbb{L}}{\overset{}{P'}}$, $\underset{\mathbb{M}}{Q'}$ con $P' - Q' \perp \mathbb{L}$ e $\perp \mathbb{M}$

(in questo modo vedo che inf è un minimo)

$\mathbb{L} \ni P + w \qquad \mathbb{M} \ni Q + u$

$\mathbb{R}^n \ni P - Q = w + u + v \qquad v \in (W+U)^\perp \qquad \mathbb{R}^n = \underbrace{(W+U)}_{} \oplus (W+U)^\perp$

non è tutto $\mathbb{R}^n$ altrimenti $P - Q \in W+U$ e $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ ed è già chiaro.

$$\underbrace{P - w}_{P' \in \mathbb{L}} - \underbrace{(Q + u)}_{Q' \in \mathbb{M}} = v$$

è ortogonale sia a $\mathbb{L}$ sia a $\mathbb{M}$

P', Q' sono una coppia di p.ti di minima distanza.

(NB) Nel caso in cui $W \oplus U$ (ossia $W \cap U = 0$)

la decomposizione $P - Q = w + u + v$ è unica e dunque ho un unica coppia di p.ti di minima dist.

- Se $W \cap U \neq 0$

Suppongo di avere P', Q' coppia di p.ti di minima distanza e prendo un $\bar{v} \in W \cap U$

allora anche $\underset{\mathbb{L}}{P' + \bar{v}}$, $\underset{\mathbb{M}}{Q' + \bar{v}}$ è coppia di p.ti di min. dist.

(si dimostra che sono tutte di questo tipo) ///

Calcolo $d(P, \text{iperpiano})$ è facile.

$\pi: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + c = 0$ i.p. in $\mathbb{E}^n$

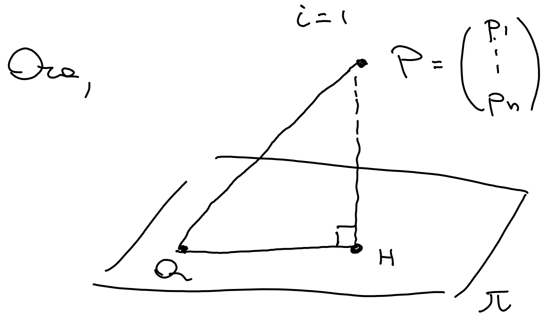
Il vettore $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ è ortogonale a π

Infatti se $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è parallelo a π

ossia è soluz. dell'eq. $\sum_{i=1}^{n} a_iX_i = 0$

abbiamo $\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = 0$ ossia $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

Ora,



$Q = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \pi$ (*) $\boxed{\sum a_iq_i + c = 0}$

$d(P, \pi) = \|P - H\| = \|$ proiezione ortogon. sul sottosp. $\langle v \rangle$ di $P - Q\|$

$\uparrow$ vettore $\perp \pi$

$= \left\| \frac{(P-Q) \cdot v}{\|v\|^2} v \right\| = \frac{|(P-Q) \cdot v|}{\|v\|^{\cancel{2}}} \cancel{\|v\|}$ in $\mathbb{R}$

$P - Q = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ \vdots \\ p_n - q_n \end{pmatrix}$

$(P - Q) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i) a_i$

$= \sum_{i=1}^{n} p_ia_i - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_ia_i}_{\overset{\shortparallel}{-c} \text{ per } *} = \sum p_ia_i + c$

dunque $d(P, \pi) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n + c|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}$

. Se $n = 2$ $d(P, \pi)$ $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ π $3x - 4y + 2 = 0$

$\uparrow$ retta

$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|20|}{5} = 4$

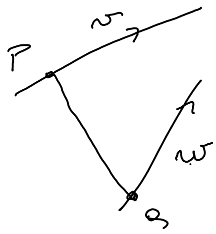
Esercizio Siano $r: \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{P} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} \rangle$ e $s: \begin{cases} y - 2z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$ in $\mathbb{E}^3$

a) verificare che r e s sono sghembe e calcolare $d(r,s)$.

Risolvo il sistema $s: \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Q} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ $= w$

↑ soluz. del sist omog. associato

Sicuramente $v \nparallel w \Rightarrow r \nparallel s$ no parallele



controllo che $P-Q$, v, w sono l. ind

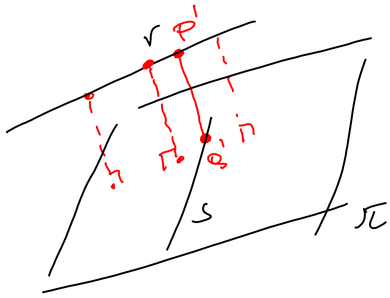
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ sono l. ind.

perché $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$

oppure li scrivo a scalino.

Dunque le 2 rette sono sghembe.

$d(r,s) = d(P, \pi)$ con π piano contenente s e parallelo ad r



$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$x + y - z - 3 = 0$

equaz $\boxed{x + y - z = 3}$

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - 2\lambda + 0\mu \\ z = 0 - \lambda + \mu \end{cases}$$ elimino parametri

$P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$d(r,s) = \frac{|0 + \cancel{(-1)} - \cancel{(-1)} - 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

b) Determinare la coppia di pti di minima distanza.

$P' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$ $\qquad Q' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

affinché P', Q' siano coppia di pti di minima dist

deve essere $P' - Q' \perp v$ e $\perp w$

$$P' - Q' = \begin{pmatrix} \lambda - 1 - \mu \\ -1 - 2 + 2\mu \\ -1 + \lambda + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \lambda - \mu \\ -3 + 2\mu \\ -1 + \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

impongo $\perp$ $\begin{cases} (P'-Q')\cdot v = 0 \\ (P'-Q')\cdot w = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1+\lambda-\cancel{\mu}-1+\lambda+\cancel{\mu}=0 \\ \cancel{-1}+\cancel{\lambda}-\mu-2(-3+2\mu)+\cancel{1}-\cancel{\lambda}-\mu=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 6-6\mu=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda=1 \\ \mu=1 \end{cases}$: i pti di m. d. sono $P' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Q' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$d(P', Q') = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3} \quad (= d(r,s))$$

Osservo r e s appartengono a piani paralleli

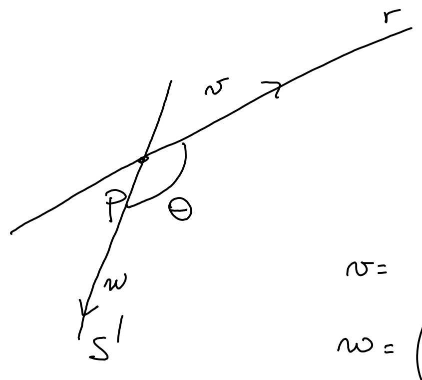
$$r \subseteq \underbrace{P + \langle v, w \rangle}_{\pi_1} \qquad s \subseteq \underbrace{Q + \langle v, w \rangle}_{\pi_2}$$

$$d(r,s) = d(\pi_1, \pi_2)$$

c) Calcolare l'angolo tra r e la retta s' per P e parallela ad s

d) Calcolare l'angolo tra r ed s.

c)



$s': P + \langle w \rangle$

$\cos\theta = \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}$ angolo tra v e w

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\cos\theta = \dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = 0$

r ed s' sono ortogonali

d) l'angolo tra r ed s è definito tramite l'angolo tra v e w e dunque è ancora $\frac{\pi}{2}$

NB più precisamente, sceglieremo sempre l'angolo acuto e dunque $\dfrac{|v \cdot w|}{\|v\| \, \|w\|} = |\cos\theta|$

Parliamo di angoli:

- nel piano angoli tra 2 rette ok
- in $\mathbb{E}^3$ - - - - .
- in $\mathbb{E}^n$ il coseno dell'angolo tra $r: P + \langle v \rangle$ $s: Q + \langle w \rangle$

è definito come il coseno dell'angolo tra v e w (preso in valore assoluto)

ossia $|v \cdot w| / \|v\| \|w\|$

- angolo tra 2 piani in $\mathbb{E}^3$

π_1 ortogonale a v_1 e π_2 ortogonale a v_2

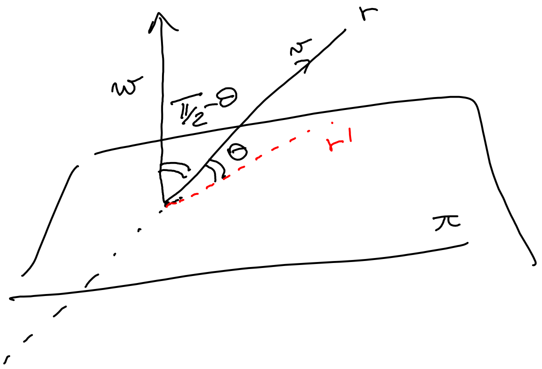
è (il coseno del) l'angolo tra v_1 e v_2 (in valore assoluto)

- Analogamente se $\pi_1 : \sum a_i x_i + c_1 = 0$ sono iperpiani
$\pi_2 : \sum b_i x_i + c_2 = 0$ in $\mathbb{E}^n$

l'angolo tra π_1 e π_2 è l'angolo tra $\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{v_1}$ e $\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{v_2}$

(più precisamente scelgo $|\cos\theta|$ con θ l'angolo tra v_1 e v_2

- angolo retta-piano in $\mathbb{E}^3$



Sia r' proiezione ortogonale di r su π

L'angolo tra r e r' è l'angolo tra r e π

è molto più facile calcolare

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

e dunque calcolo $|\sin\theta| = |$coseno angolo tra v e $w|$

- In generale non c'è una definizione

In $\mathbb{E}^n$ lavoriamo con s.d.r. ortonormali

$\{P_0, \underbrace{v_1, \ldots, v_n}\}$

base di $\mathbb{R}^n$ deve essere ortonormale ossia

$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} <$ 0 se $i \neq j$ (base è ortogonale), 1 se $i = j$ (v_i sono versori)

So che se $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

e $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sono le coord. di v risp. a $\mathcal{V}$

allora $\boxed{a_i = v \cdot v_i}$

Se $P \in \mathbb{E}^n$ e $\mathcal{R}: \{P_0, v_1, \dots, v_n\}$ è s. d. r. ortonormale allora le coord di P sono date da

$$\begin{pmatrix} (P-P_0)\cdot v_1 \\ (P-P_0)\cdot v_2 \\ \vdots \\ (P-P_0)\cdot v_n \end{pmatrix}$$

Ad es. $\mathbb{E}^3$: $\underset{P_0}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$, $\underbrace{\overset{u_1}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \overset{u_2}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}}, \overset{u_3}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}}_{\text{base ortonormale}}$

Basi ortonormali in generale hanno coefficienti "brutti"

<u>Esercizio</u> Calcolare le coordinate di $\underset{O}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$ risp. a questo s. d. rif ortonormale

$O - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} (O-P_0)\cdot u_1 \\ (O-P_0)\cdot u_2 \\ (O-P_0)\cdot u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Esercizio</u> Si considerino in $\mathbb{E}^4$ $\pi: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ e $r: \overset{Q}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} + \langle \underset{u}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \rangle$

mostrare che sono <u>sghembi</u> e determinare i pti di minima dist

$\pi: \underset{=P}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \langle \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle$ $\qquad r: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

NOTO subito che non sono parallele.

Inoltre $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P-Q}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono l. ind. in $\mathbb{R}^4$.

Dunque π, r sono sghembi ($\pi \cap r = \emptyset$, $\langle w_1, w_2 \rangle \cap \langle u \rangle = 0$)

cerco $\underset{\pi}{\underset{\in}{P'}}$: $\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ 0 + \lambda \\ 0 + \mu \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overset{r}{\overset{\in}{Q'}}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \delta \end{pmatrix}$

$P' - Q'$ sia ortogonale a π e r. $P' - Q' = \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ -2+\lambda \\ -1+\mu \\ -\delta \end{pmatrix}$

NB uso sempre

se $\mathbb{L} = P + W = P + \langle w_1, \dots, w_k \rangle$

un vettore v è ortogonale a $W \iff v$ è ortogonale ai generatori $w_1, \dots, w_k$

dimostrarlo!

$$\begin{cases} (P' - Q') \cdot w_1 = 0 \\ (P' - Q') \cdot w_2 = 0 \\ (P' - Q') \cdot u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 + 4\lambda - 2 + \lambda = 0 \\ -1 + \mu = 0 \\ -\delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d(P', Q') = \sqrt{5}$$

Esercizio $\mathbb{E}^5$

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\pi' : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

π, π' non sono incidenti, né paralleli né sghembi.
Mostrare che vi sono infinite coppie di pti di minima dist. e determinarle

Soluz. $P'' = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q'' = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$