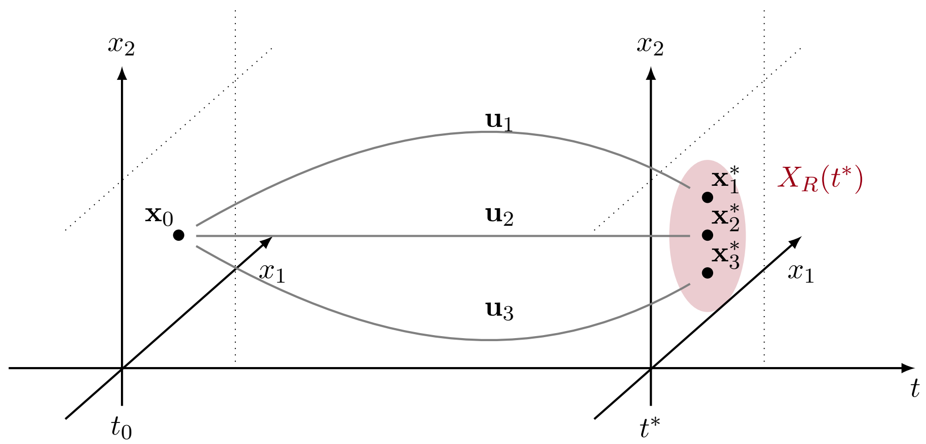
3 RAGGIUNGIBILITÀ E CONTROLLABILITÀ DEI SISTEMI DINAMICI

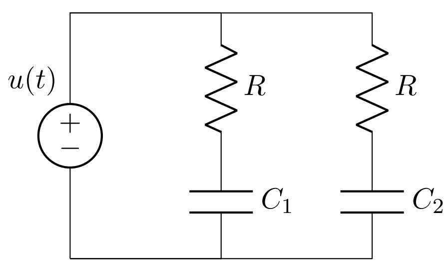
raggiungibilità di un sistema $\sim$ possibilità di raggiungere un qualsiasi stato desiderato $\mathbf{x}^*$ a partire da uno stato $\mathbf{x}_0$ fissato agendo su $\mathbf{u}(t)$

- **stato raggiungibile**: lo stato $\mathbf{x}^*$ è raggiungibile dallo stato $\mathbf{x}_0$ al tempo t^* se esiste un ingresso $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*$
- **spazio raggiungibile**: spazio raggiungibile al tempo t $X_R(t)$ è l'insieme di tutti gli stati $\mathbf{x}^*$ raggiungibili dallo stato $\mathbf{x}_0$ al tempo t

▶ tipicamente: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $t_0 = 0$



esempio



$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$

modello di stato

$$\dot{x}_1(t) = \dot{v}_{C_1}(t) = \frac{1}{C_1} i_{C_1}(t) = \frac{1}{C_1} i_R(t) = \frac{1}{C_1}\left(\frac{u(t) - v_{C_1}(t)}{R}\right) = \frac{1}{RC_1}u(t) - \frac{1}{RC_1}x_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \dot{v}_{C_2}(t) = \frac{1}{C_2} i_{C_2}(t) = \frac{1}{C_2} i_R(t) = \frac{1}{C_2}\left(\frac{u(t) - v_{C_2}(t)}{R}\right) = \frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}x_2(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} u = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}u$$

se $C_1 = C_2 = C$ allora $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall u(t), \forall t \geq 0$, infatti

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{g}u(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} u(\tau)d\tau \\
= \frac{1}{RC}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \\ e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \end{bmatrix} u(\tau)d\tau \\
= \frac{1}{RC}\begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}u(\tau)d\tau \\ \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}u(\tau)d\tau \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

da cui

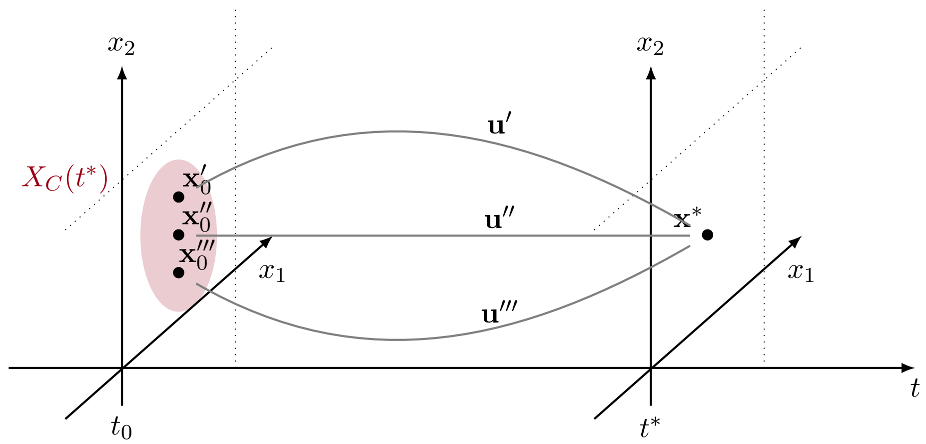
$$
X_R(t) = \{x_1 = x_2\},\ \forall t \geq 0
$$

⊠

controllabilità di un sistema $\sim$ possibilità di raggiungere uno stato desiderato $\mathbf{x}^*$ fissato a partire da un qualsiasi stato $\mathbf{x}_0$ agendo su $\mathbf{u}(t)$

- **stato controllabile**: lo stato $\mathbf{x}_0$ è controllabile allo stato $\mathbf{x}^*$ al tempo t^* se esiste un ingresso $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$, tale che $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*$
- **spazio controllabile**: spazio controllabile al tempo t $X_C(t)$ è l'insieme di tutti gli stati $\mathbf{x}_0$ controllabili allo stato $\mathbf{x}^*$ al tempo t

► tipicamente: $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, $t_0 = 0$ (controllabilità a zero)
si noti che se $\mathbf{x}_0$ è controllabile allo stato $\mathbf{x}^*$ allora $\mathbf{x}^*$ è raggiungibile dallo stato $\mathbf{x}_0$



3.1 Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto

dato $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,
allora $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{F}^{t-k-1}\mathbf{G}\mathbf{u}(k)$

in particolare, se $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$
allora $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{F}^{t-k-1}\mathbf{G}\mathbf{u}(k) = \mathcal{R}_t\mathbf{u}_t$

$$
\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \dots & \mathbf{F}^{t-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mt} \qquad \text{matrice di raggiungibilità in } t \text{ passi}
$$

qual è l'insieme di stati $\mathbf{x}^*$ raggiungibili al tempo t ($=$ in t passi) a partire da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$?

$\boxed{X_R(t) = \text{im}(\mathcal{R}_t)\text{: spazio raggiungibile in } t \text{ passi}}$

Proposizione In un sistema di dimensione n, gli spazi raggiungibili in $1, 2, \ldots$ passi soddisfano la catena di inclusioni $X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq \ldots X_R(t) \subseteq X_R(t+1) \subseteq \ldots$.
La catena è stazionaria (almeno) dal t'-esimo passo in poi, ovvero $X_R(t') = X_R(t''), \forall t'' \geq t'$, con $t' \leq n$.

Dimostrazione. Per il *teorema di Cayley-Hamilton*, il polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{F}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ di $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è un polinomio annullatore per $\mathbf{F}$, ovvero

$$\Delta_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{F}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{F} + \alpha_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Sia $\mathbf{G} = \begin{bmatrix}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{g}_m\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, si dimostra allora

1. catena di inclusioni: $X_R(t) \subseteq X_R(t+1)\ \forall t$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_t &= \begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{FG} & \ldots & \mathbf{F}^{t-1}\mathbf{G}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{g}_m & \mathbf{Fg}_1 \ldots \mathbf{Fg}_m & \ldots & \mathbf{F}^{t-1}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{F}^{t-1}\mathbf{g}_m\end{bmatrix} \\
\mathcal{R}_{t+1} &= \begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{FG} & \ldots & \mathbf{F}^{t}\mathbf{G}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{g}_m & \mathbf{Fg}_1 \ldots \mathbf{Fg}_m & \ldots & \mathbf{F}^{t-1}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{F}^{t-1}\mathbf{g}_m & \mathbf{F}^{t}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{F}^{t}\mathbf{g}_m\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow X_R(t) = \text{im}(\mathcal{R}_t) \subseteq \text{im}(\mathcal{R}_{t+1}) = X_R(t+1)$
le colonne della matrice di raggiungibilità in t passi sono un sottoinsieme di quelle della matrice di raggiungibilità in $t+1$ passi.

2. stazionarietà della catena

$$\begin{aligned}
X_R(n) &= \text{im}(\mathcal{R}_n) = \mathit{span}\{\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{g}_m, \mathbf{Fg}_1 \ldots \mathbf{Fg}_m, \ldots, \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{g}_m\} \\
X_R(n+1) &= \text{im}(\mathcal{R}_{n+1}) = \mathit{span}\{\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{g}_m, \mathbf{Fg}_1 \ldots \mathbf{Fg}_m, \ldots, \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{g}_m, \mathbf{F}^{n}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{F}^{n}\mathbf{g}_m\}
\end{aligned}$$

per il teorema di Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}^n &= -\alpha_{n-1}\mathbf{F}^{n-1} - \ldots - \alpha_1\mathbf{F} - \alpha_0\mathbf{I} \\
\Rightarrow \mathbf{F}^n\mathbf{g}_k &= -\alpha_{n-1}\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{g}_k - \ldots - \alpha_1\mathbf{Fg}_k - \alpha_0\mathbf{g}_k \quad \forall k \in \{1 \ldots m\}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow X_R(n+1) = \mathit{span}\{\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{g}_m, \mathbf{Fg}_1 \ldots \mathbf{Fg}_m, \ldots, \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{g}_1 \ldots \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{g}_m\} = X_R(n)$
esiste sicuramente $t' \leq n$ tale che $X_R(t') = X_R(t'+1)$.

Dimostrare poi che $X_R(t') = X_R(t'+1) \Rightarrow X_R(t'+1) = X_R(t'+2)$ equivale a dimostrare che $\text{im}(\mathbf{F}^{t'+1}\mathbf{G}) \subseteq \text{im}(\begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{FG} & \ldots & \mathbf{F}^{t'}\mathbf{G}\end{bmatrix}) = X_R(t'+1)$ poichè $X_R(t'+2) = \text{im}(\begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{FG} & \ldots & \mathbf{F}^{t'}\mathbf{G} & \mathbf{F}^{t'+1}\mathbf{G}\end{bmatrix})$

Per semplicità si consideri il caso $m = 1$, ovvero $\mathbf{G} = \mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{t'+1}\mathbf{g} = \mathbf{F}\,(\mathbf{F}^{t'}\mathbf{g}) = (X_R(t'+1) = X_R(t')) &= \mathbf{F}\left(\sum_{k=0}^{t'-1} \beta_k\mathbf{F}^k\mathbf{g}\right) \\
&= \mathbf{F}\left(\beta_{t'-1}\mathbf{F}^{t'-1}\mathbf{g} + \sum_{k=0}^{t'-2} \beta_k\mathbf{F}^k\mathbf{g}\right) = \beta_{t'-1}\mathbf{F}^{t'}\mathbf{g} + \sum_{k=0}^{t'-2} \beta_k\mathbf{F}^{k+1}\mathbf{g}
\end{aligned}$$

si ha che $\beta_{t'-1}\mathbf{F}^{t'}\mathbf{g} \in X_R(t'+1) = X_R(t')$ e $\sum_{k=0}^{t'-2} \beta^k\mathbf{F}^{k+1}\mathbf{g} \in X_R(t') = X_R(t'+1)$

di conseguenza im$(\mathbf{F}^{t'+1}\mathbf{G}) \subseteq X_R(t'+1) \Rightarrow X_R(t'+1) = X_R(t'+2)$

□

t':	indice di raggiungibilità
$X_R(t') \triangleq X_R$:	(massimo) spazio raggiungibile

3.1.1 Criterio di raggiungibilità del rango

quando è possibile raggiungere tutti i possibili stati $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$?

(completa) raggiungibilità

- un sistema Σ a tempo discreto si dice **(completamente) raggiungibile** se $X_R = \mathbb{R}^n$
- un sistema Σ a tempo discreto si dice **(completamente) raggiungibile in t passi** se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità

► $\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \dots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$: matrice di raggiungibilità del sistema

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

si noti che $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times mn}$, per cui

- $m = 1$: Σ raggiungibile $\iff \det(\mathcal{R}) \neq 0$
- $m > 1$: Σ raggiungibile $\iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0$

esempio

1. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{Fg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} : \text{rank}(\mathcal{R}) = 1 < 2$$

$\Longrightarrow \Sigma$ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{Fg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{rank}(\mathcal{R}) = 2$$

$\Longrightarrow \Sigma$ raggiungibile (in 2 passi) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{G}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}X_R(1)&=\mathrm{im}(\mathbf{G})=span\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\\X_R(2)&=\mathrm{im}(\begin{bmatrix}\mathbf{G}&\mathbf{FG}\end{bmatrix})=span\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \Sigma$ raggiungibile (in 2 passi)

☒

Si considerino due sistemi algebricamente equivalenti $\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$ e $\Sigma' = (\mathbf{F}', \mathbf{G}')$ tali che

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \quad \xrightarrow{\mathbf{z}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}} \quad \begin{aligned}&\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{F}'\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}'\mathbf{u}(t)\\&\mathbf{F}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}, \mathbf{G}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}\mathcal{R}' &= \begin{bmatrix}\mathbf{G}' & \mathbf{F}'\mathbf{G}' & \cdots & (\mathbf{F}')^{n-1}\mathbf{G}'\end{bmatrix}\\&= \begin{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\end{bmatrix}\\&= \mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}\end{bmatrix}\\&= \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ cambio di base non modifica la raggiungibilità poichè $\mathrm{rank}(\mathcal{R}') = \mathrm{rank}(\mathcal{R})$

in particolare, se Σ raggiungibile allora $\det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0$
perciò $\mathcal{R}' = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R} \implies \mathcal{R}'\mathcal{R}^\top = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies \mathbf{T} = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\mathcal{R}'\mathcal{R}^\top)^{-1}$

3.1.2 Controllo a energia minima

se Σ è raggiungibile in t passi, come determinare l'ingresso $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^{mt}$ che permetta di raggiungere un qualsiasi stato $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

caso $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$: si ha che $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(t) = \mathcal{R}_t\mathbf{u}_t$
si introduce l'ingresso ausiliario $\mathbf{v}_t \in \mathbb{R}^{mt}$ tale che $\mathbf{u}_t = \mathcal{R}_t^\top\mathbf{v}_t$, allora $\mathbf{v}_t = (\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}\mathbf{x}^*$
di conseguenza, risulta $\mathbf{u}_t = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}\mathbf{x}^*$

caso $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$: si ha che $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}_0 + \mathcal{R}_t\mathbf{u}_t$
di conseguenza, risulta $\mathbf{u}_t = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}(\mathbf{x}^* - \mathbf{F}^t\mathbf{x}_0)$

si osserva che

1. l'ingresso $\mathbf{u}_t$ generalmente non è unico
   $\to$ insieme dei possibili ingressi: $\boxed{\mathcal{U}_t = \{\mathbf{u}_t' = \mathbf{u}_t + \bar{\mathbf{u}},\ \bar{\mathbf{u}} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}}$
2. esiste un ingresso a **minima "energia"**: $\mathbf{u}_t^* = \arg\min_{\mathbf{u}_t' \in \mathcal{U}_t} \|\mathbf{u}_t'\|^2 = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}(\mathbf{x}^* - \mathbf{F}^t\mathbf{x}_0)$
   $\to$ l'energia minima per raggiungere $\mathbf{x}^*$ in t passi è pari a $\|\mathbf{u}_t^*\|^2 = (\mathbf{x}^*)^\top\mathcal{W}_t^{-1}\mathbf{x}^*$,
   con $\mathcal{W}_t \triangleq \mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1}\mathbf{F}^k\mathbf{G}\mathbf{G}^\top(\mathbf{F}^\top)^k$ Gramiano di raggiungibilità in t passi del sistema
   gli autovalori di $\mathcal{W}_t$ quantificano l'energia minima richiesta per raggiungere diversi stati $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$

esempio

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Sigma \text{ è raggiungibile in 2 passi}$$

▷ si vuole calcolare gli ingressi $\mathbf{u}'(t)$ che permettono di raggiungere $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in 2 passi

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_2 &= \mathcal{R}_2^\top (\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_2^\top)^{-1} \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} \end{bmatrix}^\top \left(\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} \end{bmatrix}^\top \right)^{-1} \mathbf{x}^* \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \quad \text{ingresso a energia minima}
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_2 &= \{ \mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_2 + \bar{\mathbf{u}},\ \bar{\mathbf{u}} \in \ker(\mathcal{R}_2) \} = \left\{ \mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_2 + \bar{\mathbf{u}},\ \bar{\mathbf{u}} \in \ker \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_2 + \bar{\mathbf{u}},\ \bar{\mathbf{u}} \in span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\} = \left\{ \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'(1) \\ \mathbf{u}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

⊠

3.1.3 Forma canonica di raggiungibilità

se Σ non è raggiungibile ma è tale che $\text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$, allora è possibile determinare un cambio di base $\mathbf{T}$ in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile?

si definisce $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k & \tilde{\mathbf{v}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_{n-k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
dove

- $\{\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k\}$ è l'insieme di vettori linearmente indipendenti che definiscono la base di $X_R = \text{im}(\mathcal{R})$
- $\{\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k, \tilde{\mathbf{v}}_1 \ldots \tilde{\mathbf{v}}_{n-k}\}$ è un insieme di vettori che definisce una base di $\mathbb{R}^n$

allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \quad &\to \quad \mathbf{F}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \mathbf{F}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)} \\
\mathbf{G} \quad &\to \quad \mathbf{G}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{k \times m}, \mathbf{G}_2 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times m}
\end{aligned}$$

inoltre, premettendo che (conseguentemente al teorema di Cayley-Hamilton) lo spazio raggiungibile X_R contiene $\text{im}(\mathbf{G})$ ed è $\mathbf{F}$-invariante, ovvero è tale che $\forall \mathbf{v} \in X_R \implies \mathbf{w} = \mathbf{F}\mathbf{v} \in X_R$, si verifica che

- $\mathbf{v} \in X_R \quad \to \quad \mathbf{v}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top$
- $\mathbf{w} \in X_R \quad \to \quad \mathbf{w}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_k & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(1)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top$
- $\mathbf{w}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{F}'\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{F}'\mathbf{v}'$

da cui

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{F}_{11}\mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{0} = \mathbf{F}_{21}\mathbf{v}^{(1)} \end{cases} \quad \forall \mathbf{v}^{(1)} \in \mathbb{R}^k \implies \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$$

inoltre

$$\text{im}(\mathbf{G}) \subseteq X_R \implies \mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_{NR} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \qquad \text{forma canonica di raggiungibilità}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_R(t+1) = \mathbf{F}_{11}\mathbf{x}_R(t) + \mathbf{F}_{12}\mathbf{x}_{NR}(t) + \mathbf{G}_1\mathbf{u}(t) & \text{sottosistema raggiungibile} \\ \mathbf{x}_{NR}(t+1) = \mathbf{F}_{22}\mathbf{x}_{NR}(t) & \text{sottosistema non raggiungibile} \end{cases}$$

si osserva che

- $$\begin{aligned} \text{rank}(\mathcal{R}') &= \text{rank}(\mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{F}'\mathbf{G}' & \cdots & (\mathbf{F}')^{n-1}\mathbf{G}' \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{F}_{11}\mathbf{G}_1 & \cdots & \mathbf{F}_{11}^{n-1}\mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{F}_{11}\mathbf{G}_1 & \cdots & \mathbf{F}_{11}^{k-1}\mathbf{G}_1 \end{bmatrix}\right) = \text{rank}(\mathcal{R}_R) = k \end{aligned}$$

  con $\mathcal{R}_R \in \mathbb{R}^{k \times mk}$: matrice di raggiungibilità del sottosistema raggiungibile $\Sigma_R = (\mathbf{F}_{11}, \mathbf{G}_1)$

- poichè $\mathbf{F}' \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ 0 & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}' \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{H}' \triangleq \mathbf{H}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J}' \triangleq \mathbf{J}$

  allora

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(z) = \mathbf{H}'(z\mathbf{I} - \mathbf{F}')^{-1}\mathbf{G}' + \mathbf{J}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{11} & -\mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{J} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{11})^{-1} & \star \\ \mathbf{0} & (z\mathbf{I} - \mathbf{F}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{J} = \mathbf{H}_1(zI - \mathbf{F}_{11})^{-1}\mathbf{G}_1 + \mathbf{J} = \mathbf{W}_R(z) \end{aligned}$$

  con $\mathbf{W}_R(z) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile $\Sigma_R = (\mathbf{F}_{11}, \mathbf{G}_1)$

esempio

1. $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ sistema in forma canonica con $\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   infatti

   $$\text{rank}(\mathcal{R}_R) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{F}_{11}\mathbf{G}_1 \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$$

2. $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ sistema **NON** in forma canonica con $\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   infatti

   $$\text{rank}(\mathcal{R}_R) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{F}_{11}\mathbf{G}_1 \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1$$

   si verifica che

   $$X_R = \text{im}(\mathcal{R}) = \text{im}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \mathbf{F}^2\mathbf{G} \end{bmatrix}\right) = \text{im}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

   da cui

   $$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$\Rightarrow \quad \mathbf{F}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}$$

   $$\Rightarrow \quad \mathbf{G}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

⊠

3.1.4 Test PBH di raggiungibilità

Teorema Il sistema a tempo discreto $\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$PBH(z) = \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$$

ha rango pieno ($\text{rank}(PBH(z)) = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se Σ non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ($\text{rank}(PBH(z)) < n$) per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di $\mathbf{F}_{22}$ (: matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di Σ)

Dimostrazione. si dimostra che

- Σ raggiungibile $\implies$ $\text{rank}(PBH(z)) = n \; \forall z \in \mathbb{C}$

  si suppone per assurdo che Σ sia raggiungibile ($\text{rank}(\mathcal{R}) = n$) ma $\exists \bar{z} \in \mathbb{C}$ tale che $\text{rank}(PBH(\bar{z})) < n$

  se $\text{rank}(PBH(\bar{z})) < n$ allora $PBH(\bar{z})$ ha delle righe linearmente dipendenti:

  $$\exists \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \mathbf{v}^\top PBH(\bar{z}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}^\top \begin{bmatrix} \bar{z}\mathbf{I} - \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \mathbf{v}^\top \mathbf{F} = \bar{z}\mathbf{v}^\top \\ \mathbf{v}^\top \mathbf{G} = \mathbf{0} \end{cases}$$

ma allora

$$\mathbf{v}^\top \mathcal{R} = \mathbf{v}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \cdots \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top \mathbf{G} & \mathbf{v}^\top \mathbf{F}\mathbf{G} & \cdots \mathbf{v}^\top \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{z}\mathbf{v}^\top \mathbf{G} & \cdots \bar{z}^{n-1}\mathbf{v}^\top \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \implies \quad \text{rank}(\mathcal{R}) < n$$

di conseguenza, Σ risulta non raggiungibile: *assurdo*.

- rank$(PBH(z)) = n \ \forall z \in \mathbb{C} \implies \Sigma$ raggiungibile
  TBD

□

▶ essendo gli autovalori di $\mathbf{F}_{22}$ un sottoinsieme degli autovalori di $\mathbf{F}$, il rango della matrice PBH può essere valutato solo per gli z che sono autovalori di $\mathbf{F}$

esempio

1. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{F}$ triangolare: gli autovalori di $\mathbf{F}$ sono gli elementi sulla diagonale $\rightarrow \lambda_1 = 0$, $m_1^a = 3$

$$\text{rank}(PBH(\lambda_1)) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 \quad \implies \quad \Sigma \text{ raggiungibile}$$

2. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \lambda_1 = 1$, $m_1^a = 3$

$$\text{rank}(PBH(\lambda_1)) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \quad \implies \quad \Sigma \textbf{ NON} \text{ raggiungibile}$$

⊠

3.2 Controllabilità di sistemi a tempo discreto

dato $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,
allora $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{F}^{t-k-1}\mathbf{G}\mathbf{u}(k) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}_0 + \mathcal{R}_t\mathbf{u}_t$

qual è l'insieme di stati $\mathbf{x}_0$ controllabili al tempo t ($=$ in t passi) allo stato $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$?
quando è possibile controllare a zero tutti i possibili stati $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$?

$X_C(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{F}^t\mathbf{x} \in \text{im}(\mathcal{R}_t)$: spazio controllabile in t passi

Proposizione In un sistema di dimensione n, gli spazi controllabili in $1, 2, \ldots$ passi soddisfano la catena di inclusioni $X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq \ldots X_C(t) \subseteq X_C(t+1) \subseteq \ldots$.
La catena è stazionaria (almeno) dal t'-esimo passo in poi, ovvero $X_C(t') = X_C(t''), \forall t'' \geq t'$, con $t' \leq n$.

t':	indice di controllabilità
$X_C(t') \triangleq X_C$:	(massimo) spazio controllabile

3.2.1 Criterio di controllabilità

(completa) controllabilità

- un sistema Σ a tempo discreto si dice **(completamente) controllabile** se $X_C = \mathbb{R}^n$
- un sistema Σ a tempo discreto si dice **(completamente) controllabile in t passi** se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità

► $X_C = X_C(n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{F}^n\mathbf{x} \in \text{im}(\mathcal{R}_n)\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{F}^n\mathbf{x} \in X_R\}$

$$\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{im}(\mathbf{F}^n) \subseteq \text{im}(\mathcal{R}) = X_R$$

si noti che

- Σ raggiungibile $(X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma$ controllabile
- Σ **non** raggiungibile ma $\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \Sigma$ controllabile
- Σ controllabile $\not\Rightarrow \Sigma$ raggiungibile

esempio

1. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X_R = \text{im}(\mathcal{R}) = \text{im}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{Fg} \end{bmatrix}\right) = \text{im}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}\right) = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$\text{im}(\mathbf{F}^2) = \text{im}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} span\,\{\mathbf{0}\} & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} & \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0 \\ span\left\{\begin{bmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}\right\} & \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0 \\ \mathbb{R}^2 & \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \Sigma$ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Σ controllabile se $\alpha_1 = 0$ $(\text{im}(\mathbf{F}^2) \subseteq X_R)$

2. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{Fg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$: rank$(\mathcal{R}) = 2$

$\Longrightarrow \Sigma$ raggiungibile (in 2 passi) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Σ controllabile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{Fg} & \mathbf{F}^2\mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \mathsf{rank}(\mathcal{R}) = 1$$

$$\begin{aligned}
X_C(1) &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{Fx} \in \mathsf{im}(\mathcal{R}_1)\right\} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{Fx} \in \mathsf{im}(\mathbf{g})\right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ : \ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ : \ \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
X_C(2) &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{Fx} \in \mathsf{im}(\mathcal{R}_2)\right\} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{F}^2\mathbf{x} \in \mathsf{im}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{Fg} \end{bmatrix}\right)\right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ : \ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ : \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

$\implies \Sigma$ non raggiungibile
Σ controllabile (in 2 passi)

⊠

3.2.2 Controllabilità e forma canonica di raggiungibilità

sia Σ non raggiungibile ($\mathsf{rank}(\mathcal{R}) = k < n$)
allora esiste una matrice di cambio base $\mathbf{T}$ che porta il sistema in foma canonica di raggiungibilità:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_{NR} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R(t+1) \\ \mathbf{x}_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{FT} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R(t) \\ \mathbf{x}_{NR}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Gu} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R(t) \\ \mathbf{x}_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_R(t+1) = \mathbf{F}_{11}\mathbf{x}_R(t) + \mathbf{F}_{12}\mathbf{x}_{NR}(t) + \mathbf{G}_1\mathbf{u}(t) & \Sigma_R \text{ sottosistema raggiungibile} \\ \mathbf{x}_{NR}(t+1) = \mathbf{F}_{22}\mathbf{x}_{NR}(t) & \Sigma_{NR} \text{ sottosistema non raggiungibile} \end{cases}$$

si osserva che

- Σ_R raggiungibile $\Rightarrow \Sigma_R$ controllabile

  Σ_{NR} non raggiungibile **ma** Σ_{NR} controllabile

  $$\begin{aligned}
  &\Leftrightarrow \quad \exists \bar{t} \text{ tale che } \mathbf{x}_{NR}(\bar{t}) = \mathbf{F}_{22}^{\bar{t}}\mathbf{x}_{NR}(0) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}_{NR}(0) \in \mathbb{R}^{n-k} \\
  &\Leftrightarrow \quad \exists \bar{t} \text{ tale che } \mathbf{F}_{22}^{\bar{t}}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-k} \\
  &\Leftrightarrow \quad \exists \bar{t} \text{ tale che } \mathbf{F}_{22}^{\bar{t}} = \mathbf{0} \\
  &\Leftrightarrow \quad \mathbf{F}_{22} \text{ è nilpotente } (\mathbf{F}_{22}^{\bar{t}}) \\
  &\Leftrightarrow \quad \text{l'unico autovalore di } \mathbf{F}_{22} \text{ è zero}
  \end{aligned}$$

  $\implies \Sigma$ controllabile $\Leftrightarrow \mathbf{F}_{22}$ è nilpotente

- in generale $X_R = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^k \right\} \subseteq X_C$
- $\mathbf{F}_{22}$ invertibile $\Rightarrow \mathbf{x}_{NR}(t) = \mathbf{F}_{22}^t \mathbf{x}_{NR}(0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}_{NR}(0) = \mathbf{0}$

  $\Rightarrow X_R = X_C$ (raggiungibilità $\equiv$ controllabilità)

  $\mathbf{F}$ invertibile $\Leftrightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}$ invertibile

  $\Rightarrow \mathbf{F}_{22}$ invertibile

  $\Rightarrow X_R = X_C$ (raggiungibilità $\equiv$ controllabilità)

  un sistema a tempo discreto in cui la matrice di stato $\mathbf{F}$ è invertibile se dice *reversibile*
  $\Rightarrow$ è sempre possibile ricostruire lo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ a partire dalla conoscenza di $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\cdot)$
  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}(0) + \mathcal{R}_t\mathbf{u}_t \ \rightarrow \ \mathbf{F}^t\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t) - \mathcal{R}_t\mathbf{u}_t \ \rightarrow \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{F}^{-t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{F}^{-t}\mathcal{R}_t\mathbf{u}_t$

3.2.3 Test PBH di controllabilità

Teorema Il sistema a tempo discreto $\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$PBH(z) = \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$$

ha rango pieno (rank$(PBH(z)) = n$) per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

se rank$(PBH(z)) < n$ solo per $z = 0$
allora l'unico autovalore non raggiungibile (: autovalore di $\mathbf{F}_{22}$) è $\lambda = 0$ perciò Σ risulta controllabile
► la matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di $\mathbf{F}$

3.3 Raggiungibilità di sistemi lineari a tempo continuo

dato $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,
allora $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{F}^{t-\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau$

in particolare, se $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$
allora $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathbf{F}^{t-\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau$

qual è l'insieme di stati $\mathbf{x}^*$ raggiungibili al tempo t ($=$ in t passi) a partire da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$?
quando è possibile raggiungere tutti i possibili stati $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$?

sia $\mathcal{U}_{[0,t]}$ l'inisame delle funzioni m-dimensionali integrabili nell'intervallo $[0, t]$

$X_R(t) = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists \mathbf{u} \in \mathcal{U}_{[0,t]} \text{tale che} \mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathbf{F}^{t-\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau \right\}$: spazio raggiungibile al tempo t

X_R: (massimo) spazio raggiungibile

(completa) raggiungibilità

- un sistema Σ a tempo continuo si dice **(completamente) raggiungibile** se $X_R = \mathbb{R}^n$

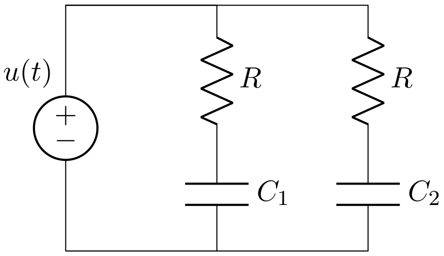
► $\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \dots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$: matrice di raggiungibilità del sistema

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$
inoltre si nota che *molti dei risultati sulla raggiungibilità a tempo discreto valgono anche a tempo continuo*, in particolare

- X_R è $\mathbf{F}$-invariante e contiene im$(\mathbf{G})$
- Forma canonica di raggiungibilità: $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_{NR} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, $\mathbf{F}' \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}' \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
- **Criterio PBH**: Σ raggiungibile $\iff$ rank $\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

esempio



$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$

modello di stato

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} u = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}u$$

allora

$$\det(\mathcal{R}) = \det(\begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{F}\mathbf{g} \end{bmatrix}) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R^2C_1^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{R^2C_2^2} \end{bmatrix}\right)$$
$$= -\frac{1}{R^3C_1C_2^2} + \frac{1}{R^3C_1^2C_2} = \frac{1}{R^3C_1C_2}\left(-\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right) = \frac{1}{R^3C_1C_2}\left(\frac{C_2 - C_1}{C_1C_2}\right), \qquad R, C_1, C_2 > 0$$

da cui si ha che

$$\det(\mathcal{R}) \begin{cases} = 0 & C_1 = C_2 & \rightarrow & \Sigma \text{ non raggiungibile} \\ \neq 0 & C_1 \neq C_2 & \rightarrow & \Sigma \text{ raggiungibile} \end{cases}$$

⊠

3.4 Controllabilità di sistemi lineari a tempo continuo

dato $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,
allora $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{F}^{t-\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau$

qual è l'insieme di stati $\mathbf{x}_0$ controllabili al tempo t ($=$ in t passi) allo stato $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$?
quando è possibile controllare a zero tutti i possibili stati $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$?

$X_C(t)$: spazio controllabile at tempo t
X_C: (massimo) spazio controllabile

(completa) controllabilità

- un sistema Σ a tempo continuo si dice **(completamente) controllabile** se $X_C = \mathbb{R}^n$

▶ $\mathbf{x}_0 \in X_C(t) \;\Leftrightarrow\; \exists \mathbf{u} \in \mathcal{U}_{[0,t]}$ tale che $\mathbf{0} = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{F}^{t-\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau$

$\Leftrightarrow\; e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 \in X_R(t) = X_R \; (t > 0) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x}_0 \in e^{-\mathbf{F}t}X_R = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \;:\; \exists \mathbf{w} \in X_R, \mathbf{v} = e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{w}\}$

$\Leftrightarrow\; \mathbf{x}_0 \in X_R$ perchè $e^{-\mathbf{F}t}X_R = X_R$ essendo 1) X_R è $\mathbf{F}$-invariante (e quindi $e^{-\mathbf{F}t}$ invariante)

2) $e^{-\mathbf{F}t}$ invertibile $\rightarrow \dim(e^{-\mathbf{F}t}X_R) = \dim(X_R)$

$$\boxed{X_C = X_C(t) = X_R}$$

Σ controllabile $\iff$ Σ raggiungibile