RECAP : lezione 11

- raggiungibilità : possibilità di raggiungere qualsiasi stato desiderato x^* a partire da uno stato ~~iniziale x_0~~ fissato agendo su u $(x_0 = 0,\ t_0 = 0)$

t.d.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G\, u(k) = R_t\, u_t \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mt}$$

$$R_t = \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mt}$$: matrice di raggiungibilità in t passi

$$X_R(t) = \mathrm{im}(R_t)$$

$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \dots$

$\exists\, t' \le n$ tale che $X_R(t') = X_R(t'')\ \forall\, t'' \ge t'$

t' : indice di raggiungibilità

$X_R(t') = X_R$: massimo spazio di rapp.

(completa) raggiungibilità : $X_R = \mathbb{R}^n$

Σ raggiung. $\iff$ $\mathrm{rank}\, R_n = n$

esempio

- $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad n = 3$

① $X_R(1) = \mathrm{im}(G) = \mathrm{im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$X_R(2) = \mathrm{im}\left(\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}\right) = \mathrm{im}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$X_R(3) = \mathrm{im}\left(\begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix}\right) = \mathrm{im}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$X_R(2) = X_R(3) = X_R \ne \mathbb{R}^3$

2 : indice di raggiungibilità

$\Rightarrow$ $\Sigma = (F, G)$ non è raggiungibile

② $\mathrm{rank}(R_3) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix}\right) = \mathrm{im}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \ne 3$

$\Rightarrow$ $\Sigma = (F, G)$ non è raggiungibile sistemi algebricamente equivalenti

$$\Sigma: \ x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z = T^{-1}x} \Sigma': \ z(t+1) = F'z(t) + G'u(t)$$

$$F' = T^{-1}FT \ , \ G' = T^{-1}G$$

allora

$$R' = [G' \ \ F'G' \ \ \cdots \ \ (F')^{t-1}G']$$
$$= [T^{-1}G \ \ T^{-1}FTT^{-1}G \ \ \cdots \ \ (T^{-1}FT)^{t-1}T^{-1}G]$$
$$= [T^{-1}G \ \ T^{-1}FG \ \ \cdots \ \ T^{-1}F^{t-1}\cancel{TT^{-1}}G]$$
$$= T^{-1}[G \ \ FG \ \ \cdots \ \ F^{t-1}G]$$
$$= T^{-1}R$$

$\text{rank}(R') = \text{rank}(R)$

NB. se Σ è raggiungibile allora $\det(RR^T) \neq 0$
perciò $R' = T^{-1}R$

$$R'R^T = T^{-1}RR^T$$
$$T^{-1} = R'R^T(RR^T)^{-1} \longrightarrow T = RR^T(R'R^T)^{-1}$$

CONTROLLO a ENERGIA MINIMA

se Σ è raggiungibile in t passi
allora esiste u_t tale che $x^* = R_t u_t$
ma come si calcola u_t ?

caso $x_0 = 0$: $x^* = R_t \cdot u_t$

v_t tale che $u_t = R_t^T v_t$

$$x^* = R_t \cdot R_t^T v_t \longrightarrow v_t = (R_t R_t^T)^{-1} x^*$$

$$\Rightarrow u_t = \underbrace{R_t^T (R_t R_t^T)^{-1}}_{\mathbb{R}^{mt \times n} \ni R_t^\#} x^* \in \mathbb{R}^{mt}$$

$R_t^\#$: pseudo inversa

caso $x_0 \neq 0$: $x^* = F^t x_0 + R_t \cdot u_t$

$$x^{**} = x^* - F^t x_0 = R_t u_t$$

$$\Rightarrow u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} x^{**}$$
$$= R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} (x^* - F^t x_0)$$

$x_0 = 0$

$\min_x f(x)$ = valore minimo di f

$\arg\min_x f(x)$ = valore di x che rende minima f

OSSERVAZIONI

- u_t non è generalmente unico

$$\mathcal{U}_t = \{ u_t' = u_t + \bar{u} \,,\ \bar{u} \in \ker(R_t) \}$$

spazio degli ingressi

- esiste un ingresso a energia minima

$$u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} (x^* - F^t x_0) = \arg\min_{u_t' \in \mathcal{U}_t} \| u_t' \|^2$$

$$\| u_t' \|^2 = (x^*)^T W_t^{-1} x^*$$

$$W_t = R_t R_t^T = \sum_{k=0}^{t-1} F^k G G^T (F^T)^k \quad : \text{ gramiano di raggiungibilità in } t \text{ passi}$$

esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = R_3 = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rank } R = 3$$

$\longrightarrow$ sistema raggiungibile (in 2 passi)

$$u_t \longrightarrow x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = R_2^T (R_2 R_2^T)^{-1} x^*$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad : \text{ ingresso a energia minima}$$

$$\ker R_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{ u_2' = u_2 + \bar{u} \,,\ \bar{u} \in \ker R_2 \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} ,\ \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} ,\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

FORMA CANONICA di RAGGIUNGIBILITÀ

Se Σ è NON raggiungibile ma è tale che rank $R = k < n$
allora è possibile determinare un cambio di base T in modo da
"separare" la parte del sistema raggiungibile da quella non raggiungibile?

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$T = \left[v_1 \dots v_k \;\vdots\; \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_{n-k} \right]$$

$\{v_1 \dots v_k\}$: base di $X_R = \mathrm{im}(R)$

$\{\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_{n-k}\}$ scelti in modo che $\{v_1 \dots v_k, \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_{n-k}\}$: base di $\mathbb{R}^n$

allora

$$F' = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} F_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k} \\ F_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)} \end{array}$$

$$G' = T^{-1} G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} G_1 \in \mathbb{R}^{k \times m} \\ G_2 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times m} \end{array}$$

- lo spazio X_R
  - contiene l'immagine di G : $\mathrm{im}\, G \subseteq X_R$
  - è F-invariante : $\forall v \in X_R \longrightarrow w = Fv \in X_R$

$$v \in X_R \longrightarrow v' = T^{-1} v = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} k \\ \\ n-k \end{array} = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w \in X_R \longrightarrow w' = T^{-1} w = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} k \\ \\ n-k \end{array} = \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w' = T^{-1} w = T^{-1} F v = T^{-1} F T T^{-1} v = F' T^{-1} v = F' v'$$

$$w' = \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} w^{(1)} = F_{11} v^{(1)} \\ 0 = F_{21} v^{(1)} \end{cases} \quad \forall v^{(1)} \in \mathbb{R}^k$$

$$\Downarrow$$

$$F_{21} = 0$$

$$\mathrm{im}\, G \subseteq X_R \longrightarrow G' = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z(t) = T^{-1}x(t) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ \hline x_{NR}(t) \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array}$$

$$z(t+1) = F'z(t) + G'u(t) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

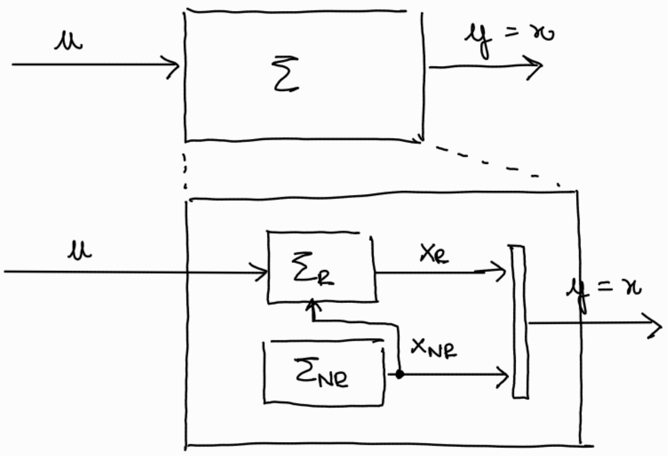
forma canonica di raggiungibilità

$$\begin{cases} x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1 u(t) & : \ \Sigma_R = (F_{11}, G_1) \\ x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t) & : \ \Sigma_{NR} = (F_{22}, 0) \end{cases}$$

sottosistema raggiungibile

sottosistema non raggiungibile

$$z(t+1) = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$



OSSERVAZIONI

•) $$\operatorname{rank}(R') = \operatorname{rank}(R) = \operatorname{rank}(T^{-1}R) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} G' & F'G' & \dots & (F')^{t-1}G' \end{bmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \dots & (F_{11})^{t-1}G \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{array}{l} k \times mt \\ n-k \times mt \end{array}$$

$$= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & (F_{11})^{t-1}G \end{bmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{rank}(R_R)$$

$R_R \in \mathbb{R}^{k \times mt}$: matrice di ragg. di Σ_R

•) $$W'(z) = H'(zI - F')^{-1}G' + J' = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}\left(zI - \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J$$

$$= H_1 (zI - F_{11})^{-1} G_1 + J$$

$$= W_R(z)$$

$W_R \in \mathbb{R}^{p \times m}$: matrice di trasferimento di Σ_R