3 RAGGIUNGIBILITÀ e CONTROLLABILITÀ di SISTEMI DINAMICI a tempo continuo e a tempo discreto

RAGGIUNGIBILITÀ di un SISTEMA

∼ possibilità di raggiungere un qualsiasi stato desiderato x^* a partire da uno stato x_0 fissato agendo su $u(t)$

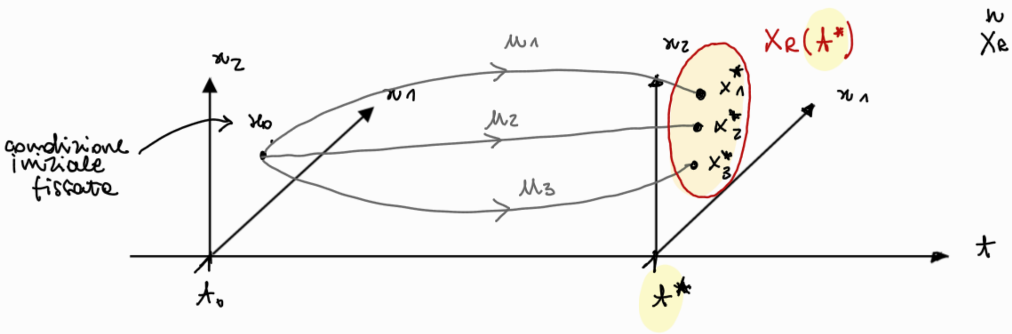
STATO RAGGIUNGIBILE

∼ lo stato x^* è raggiungibile dallo stato x_0 al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \le t \le t^*$ tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$

SPAZIO RAGGIUNGIBILE al tempo t $X_R(t)$

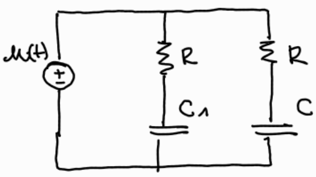
∼ insieme di tutti gli stati x^* raggiungibili dallo stato x_0 al tempo t

▷ tipicamente : $t_0 = 0$, $x_0 = 0$



$n = 2$
$X_R(t^*) \subseteq \mathbb{R}^2$

esempio



$x_1(t) = V_1(t)$: tensione ai capi di C_1

$x_2(t) = V_2(t)$: tensione ai capi di C_2

$x_1(0) = x_2(0) = 0$

modello di stato

$$\dot{x}_1(t) = \dot{V}_1(t) = \frac{1}{C_1} \cdot i_1(t) = \frac{1}{C_1}\left(\frac{u(t) - V_1(t)}{R}\right) = \frac{1}{RC_1} u(t) - \frac{1}{RC_1} x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \dot{V}_2(t) = \frac{1}{C_2} \cdot i_2(t) = \frac{1}{C_2}\left(\frac{u(t) - V_2(t)}{R}\right) = \frac{1}{RC_2} u(t) - \frac{1}{RC_2} x_2(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{F \in \mathbb{R}^{2\times 2}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{G \in \mathbb{R}^{2\times 1}} u(t)$$

se $C_1 = C_2 = C$
allora

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) = e^{Ft} x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G\, u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t e^{F(t-\tau)} G\, u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{RC} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \\ e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau = \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau \\ \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

per ogni $u(t)$ $\forall t \geq 0$ $\longrightarrow x_1(t) = x_2(t) \implies X_R(t) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^2 \mid x(t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \right\}$ $\boxtimes$

CONTROLLABILITÀ di un SISTEMA

~ possibilità di raggiungere uno stato desiderato x^* fissato a partire da un qualunque stato iniziale x_0 agendo su $u(t)$

STATO CONTROLLABILE

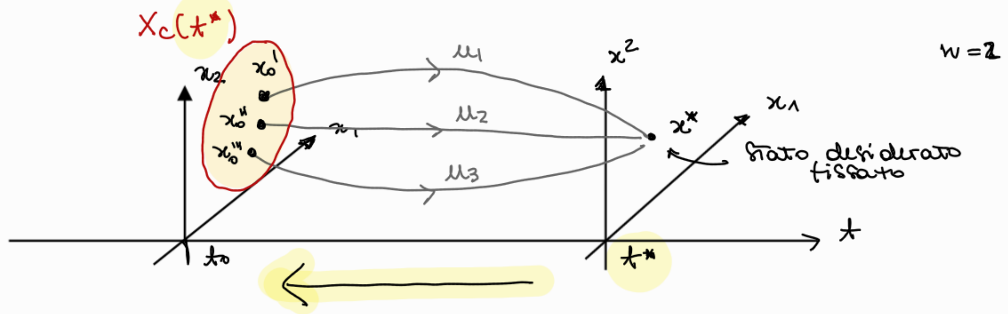
~ stato x_0 è controllabile allo stato x^* al tempo t^* se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t^*$ tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t^*) = x^*$

(x^* è raggiungibile dallo stato x_0 ~ x_0 è controllabile allo stato x^*)

SPAZIO CONTROLLABILE al tempo t $X_C(t)$

~ insieme degli stati x_0 controllabili allo stato x^* al tempo t

▷ tipicamente : $x^* = 0$, $t_0 = 0$



RAGGIUNGIBILITÀ di SISTEMI a TEMPO DISCRETO

~ possibilità di raggiungere un qualsiasi stato desiderato x^* a partire da uno stato iniziale x_0 fissato agendo su $u(t)$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad \begin{array}{ll} x(t) \in \mathbb{R}^n & F \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ u(t) \in \mathbb{R}^m & G \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{array}$$

$$\hookrightarrow x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$$

$$= F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G\, u(k)$$

$x_0 = 0$

$$= \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G\, u(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix}}_{R_t \in \mathbb{R}^{n \times m \cdot t}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{u_t \in \mathbb{R}^{mt}}$$

$$= F^{t-1} G u(0) + F^{t-2} G u(1) + \cdots + G u(t-1)$$

$$R_t = \left[G \;\; FG \; \cdots \; F^{t-1}G \right] \in \mathbb{R}^{n \times mt}$$: matrice di raggiungibilità in t passi

$$X_R(t) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \, u_t \text{ tale che } x = R_t \cdot u_t \} = \mathrm{im}(R_t)$$

Proposizione

- •) In un sistema di dimensione n, gli spazi raggiungibili in $1, 2, 3 \ldots$ passi soddisfano la catena di inclusioni $X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \ldots$
- •) la catena è stazionaria (almeno) dal t'-esimo passo in poi, ovvero $X_R(t') = X_R(t'') \quad \forall \, t'' \geq t'$ con $t' \leq n$.

dimostrazione

teorema di Cayley-Hamilton : il polinomio caratteristico di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è un polinomio annullatore per F

$\Delta_F(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$: polinomio caratteristico di F

$$\boxed{\Delta_F(F) = F^n + \alpha_{n-1} F^{n-1} + \cdots + \alpha_1 F + \alpha_0 = 0}$$

polinomio annullatore

$$\Rightarrow F^n = -\alpha_{n-1} F^{n-1} - \cdots - \alpha_1 F - \alpha_0$$

$G \in \mathbb{R}^{n \times m} \longrightarrow G = \left[g_1 \cdots g_m \right] \qquad g_i \in \mathbb{R}^n$: colonna di G

•) catena di inclusioni : $X_R(t) \subseteq X_R(t+1) \quad \forall \, t \leq n-1$

$$R_t = \left[G \;\; FG \; \cdots \; F^{t-1}G \right] = \left[g_1 \cdots g_m \;\; Fg_1 \cdots Fg_m \; \cdots \; F^{t-1}g_1 \cdots F^{t-1}g_m \right]$$

$$R_{t+1} = \left[G \;\; FG \; \cdots \; F^{t-1}G \;\; F^tG \right] = \left[g_1 \cdots g_m \;\; Fg_1 \cdots Fg_m \; \cdots \; F^{t-1}g_1 \cdots F^{t-1}g_m \;\; F^tg_1 \cdots F^tg_m \right]$$

$$\Rightarrow X_R(t) = \mathrm{im}(R_t) \subseteq \mathrm{im}(R_{t+1}) = X_R(t+1)$$

le colonne di R_t sono un sottoinsieme delle colonne di R_{t+1}

•) stazionarietà della catena per $t' \leq n$

$t' = n$

$$X_R(n) = \mathrm{im}(R_n) = \mathrm{span}\{ g_1 \cdots g_m, Fg_1 \cdots Fg_m, F^{n-1}g_1 \cdots F^{n-1}g_m \}$$

$$X_R(n+1) = \mathrm{im}(R_{n+1}) = \mathrm{span}\{ g_1 \cdots g_m, Fg_1 \cdots Fg_m, F^{n-1}g_1 \cdots F^{n-1}g_m, F^ng_1 \cdots F^ng_m \}$$

$$\Rightarrow \left(\text{Cayley-Hamilton} \quad F^n = -\alpha_{n-1}F^{n-1} - \cdots - \alpha_1 F - \alpha_0 \right.$$
$$\left. F^n g_i = -\alpha_{n-1}F^{n-1}g_i - \cdots \alpha_1 F g_i - \alpha_0 g_i \right)$$

$$X_R(n+1) = \mathrm{span}\{ g_1 \cdots g_m, Fg_1 \cdots Fg_m, F^{n-1}g_1 \cdots F^{n-1}g_m \} = X_R(n)$$

quindi $\exists \, t' \leq n$ per cui $X_R(t') = X_R(t'+1)$

$$X_R(t') = X_R(t'+1) \Rightarrow X_R(t'+1) = X_R(t'+2)$$

equivalentemente

$$\mathrm{Im}(F^{t'+1}G) \subseteq \mathrm{im}\left(\left[G \;\; FG \; \cdots \; F^{t'}G \right] \right) = X_R(t'+1)$$

poichè $X_R(t'+2) = \operatorname{im}\left(\left[G \;\; FG \;\cdots\; F^{t'+1}G\right]\right)$

per semplicità si assume $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $m=1$ $\longrightarrow$ $G = g \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
F^{t'+1}g = F(F^{t'}g) &= \left[\, X_R(t'+1) = X_R(t') \,\right] = \\
&= F\left(\sum_{k=0}^{t'-1} \beta_k F^k g\right) \\
&= F\left(\beta_{t'-1} F^{t'-1} g + \sum_{k=0}^{t'-2} \beta_k F^k g\right) \\
&= \beta_{t'-1} F^{t'} g + \sum_{k=0}^{t'-2} \beta_k F^{k+1} g
\end{aligned}
$$

$$\beta_{t'-1} F^{t'} g \in X_R(t'+1) = X_R(t')$$

$$\sum_{k=0}^{t'-2} \beta_k F^{k+1} g \in X_R(t') = X_R(t'+1)$$

$$\Rightarrow F^{t'+1} g \in X_R(t'+1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{im}(F^{t'+1}G) \subseteq X_R(t'+1) \quad \Rightarrow \quad X_R(t'+1) = X_R(t'+2)$$

cvd $\square$

t' : indice di raggiungibilità

$X_R(t') = X_R$: (massimo) spazio raggiungibile

CRITERIO di RAGGIUNGIBILITÀ del RANGO

$X_R = \mathbb{R}^n$

(completa) raggiungibilità

- un sistema Σ a tempo discreto si dice (completamente) raggiungibile se $\boxed{X_R = \mathbb{R}^n}$
- un sistema Σ a tempo discreto si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R = X_R(t) = \mathbb{R}^n$ con t indice di raggiungibilità

$$R = R_n = \left[\, G \;\; FG \;\cdots\; F^{n-1}G \,\right] \in \mathbb{R}^{n\times n\cdot m}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \longleftrightarrow \boxed{\operatorname{im}(R_n) = \mathbb{R}^n} \longleftrightarrow \operatorname{rank}(R_n) = n$$

NB $R = R_n \in \mathbb{R}^{n\times n\cdot m}$

- $m = 1$ allora $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\operatorname{rank}(R) = n \longleftrightarrow \det(R) \neq 0$
- $m > 1$ allora $R \in \mathbb{R}^{n\times nm}$

  $RR^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\operatorname{rank}(R) = \operatorname{rank}(RR^T) = n$

  $\longleftrightarrow \det(RR^T) \neq 0$

esempio

1. $$x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}}_{F} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G} u(t) \qquad n = 2$$

$$R = [G \ \ FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \ : \ \text{rank}(R) = 1 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2$$

$\Longrightarrow$ Σ non raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2$

2. $$x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}}_{F} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{G} u(t) \qquad n = 2$$

$$R = [G \ \ FG] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ : \ \text{rank}(R) = 2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2$$

$\Longrightarrow$ Σ raggiungibile $\forall \alpha_1, \alpha_2$ (in 2 passi)

$$X_R(1) = \text{im}(R_1) = \text{im}(G) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^2$$
$$\neq X_R(2) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3. $$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad n = 3$$

$$X_R(1) = \text{im}(G) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^3$$
$$\cap$$
$$X_R(2) = \text{im}\left([G \ \ \underbrace{FG}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}] \right) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$\Longrightarrow$ Σ raggiungibile in 2 passi

$$X_R(3) = \text{im}\left([G \ \ FG \ \ F^2G] \right) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\boxtimes$