2 DINAMICA DEI SISTEMI DINAMICI

Esercizio 1

Si consideri la matrice $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1+\alpha & 1 \end{bmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si determinino gli autovalori di $\mathbf{F}$ e le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori di $\mathbf{F}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $\mathbf{F}$ è diagonalizzabile?

Soluzione

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ con $m_1^a = 2, m_2^a = 1, m_1^g = \begin{cases} 1 & \alpha \neq -2 \\ 2 & \alpha = 2 \end{cases}, m_2^g = 1$
$\mathbf{F}$ è diagonalizzabile se $\alpha = -2$.

Esercizio 2

Si consideri la matrice $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.
Se possibile, si calcoli $e^{\mathbf{F}t}$, $t \geq 0$, tramite diagonalizzazione di $\mathbf{F}$.

Soluzione

$e^{\mathbf{F}t} = \mathbf{T}e^{\mathbf{F}_D t}\mathbf{T}^{-1}$, dove $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Esercizio 3

Sia $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si calcoli la forma di Jordan di $\mathbf{F}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

se $\alpha \neq 1, 2,$ allora $\mathbf{F}_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$; se $\alpha = 2$ allora $\mathbf{F}_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; se $\alpha = 1$ allora $\mathbf{F}_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 4

Si consideri la matrice $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si calcoli la forma di Jordan di $\mathbf{F}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

se $\alpha \neq 0$ allora $\mathbf{F}_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; se $\alpha = 0$ allora $\mathbf{F}_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 5

Si consideri il sistema autonomo a tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t)$, dove

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si determinino i modi elementari del sistema e il loro carattere (limitato/convergente/divergente). Inoltre, si calcoli l'evoluzione dello stato del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$\mathbf{x}'(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}''(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}'''(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Modi: e^{-2t} (convergente), $e^{0t} = 1$ (limitato), e^{3t} (divergente)

Evoluzione libera: $x'(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x''(t) = \begin{bmatrix} \frac{13}{15}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{3} \\ \frac{13}{15}e^{3t} + \frac{3}{10}e^{-2t} - \frac{1}{6} \\ \frac{26}{15}e^{3t} - \frac{2}{5}e^{-2t} - \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $x'''(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

Esercizio 6

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Si determini la funzione di trasferimento del sistema e l'evoluzione forzata dell'uscita del sistema in corrispondenza degli ingressi

$$u'(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad \text{e} \quad u''(t) = t + e^{-t}, \quad t \geq 0$$

.

Soluzione

Funzione di Trasferimento: $W(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$.
Evoluzione forzata: $y'(t) = te^{-t} - t^2e^{-t}$, $y''(t) = 3 - t - (3 + t + t^2)e^{-t}$, $t \geq 0$.

Esercizio 7

Sia $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Si calcoli $e^{\mathbf{F}t}$, $t \geq 0$, usando Laplace.

Soluzione

$$e^{\mathbf{F}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 8

Si consideri il sistema autonomo a tempo discreto $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t)$, dove

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si determinino i modi elementari del sistema e il loro carattere (limitato/convergente/divergente). Inoltre, si calcoli l'evoluzione del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$\mathbf{x}'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}''(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}'''(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Modi: $(-2)^t$ (divergente), 1^t (convergente), $\delta(t)$ (limitato).

Evoluzione libera: $x'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-2)^t \end{bmatrix}, \quad x''(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x'''(t) = \begin{bmatrix} 2-\delta(t) \\ 1 \\ 1 - \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}(-2)^t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$

Esercizio 9

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Si determini la funzione di trasferimento del sistema e l'evoluzione forzata del sistema in corrispondenza degli ingressi

$$u'(t) = 2^{-t},\ t \geq 0 \quad \text{e} \quad u''(t) = 1 + 2^{-t},\ t \geq 0$$

Soluzione

Funzione di Trasferimento: $W(z) = \frac{z}{(z-1/2)^2}$.

Evoluzione forzata: $y'(t) = \binom{t}{2} 2^{-t+2}, \quad y''(t) = \binom{t}{2} 2^{-t+2} - t 2^{-t+2} - 2^{-t+2} + 4, \quad t \geq 0.$

Esercizio 10

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Si determini l'evoluzione complessiva del (libera + forzata) in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 0.8^t$, $t \geq 0$, e condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soluzione

Evoluzione libera + forzata: $y(t) = \frac{1}{3}2^{-t+1} + \frac{10}{3}0.8^t, \quad t \geq 0.$

Esercizio 11

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - 4\sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -2\sin^2(x_1(t)) + x_2(t)e^{x_1(t)} \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $\bar{x} = (x_1, x_2) = (0, 0)$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando il teorema di linearizzazione.

Soluzione

L'equilibrio è instabile, perché il sistema linearizzato ha un autovalore in $+1$.

Esercizio 12

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha - 1)x_1(t) - x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $\bar{x} = (x_1, x_2) = (0, 0)$ al variare del parametro α utilizzando il teorema di linearizzazione.

Soluzione

L'equilibrio è asintoticamente stabile per $0 < \alpha < 1$ e instabile per $\alpha < 0$ e $\alpha > 1$.

Esercizio 13

Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha x_1(t)(1 - x_1^2(t)) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

. Si studi la stabilità del punto di equilibrio $\bar{x} = (x_1, x_2) = (0, 0)$ al variare del parametro α utilizzando il teorema di linearizzazione.

Soluzione

L'equilibrio è asintoticamente stabile per $|\alpha| < 1$ e instabile per $|\alpha| > 1$.

Esercizio 14

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + x_2(t) - \alpha x_3^2(t) + \alpha(x_1(t) - x_2(t))^3 \\ \dot{x}_2(t) = -(1 + \alpha)x_1(t) + \alpha(x_1(t) - x_2(t))^3 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = (x_1, x_2) = (0, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando il teorema di linearizzazione.

Soluzione

L'equilibrio è asintoticamente stabile per $-1 < \alpha < 0$ e instabile per $\alpha < -1$ e $\alpha > 0$.

Esercizio 15

Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_2^2(t) - \alpha^2)x_1^2(t)x_2(t) + (\alpha^2 - x_1^2(t))x_2(t) \\ x_2(t+1) = (x_1^2(t) - \alpha^2)x_2^2(t)x_1(t) + (\alpha^2 - x_2^2(t))x_1(t) \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = (x_1, x_2) = (0, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando il teorema di linearizzazione.

Soluzione

L'equilibrio è asintoticamente stabile per $|\alpha| < 1$ e instabile per $|\alpha| > 1$.