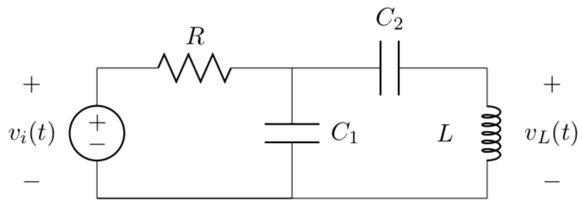
1 MODELLIZZAZIONE DI SISTEMI DINAMICI

Esercizio 1

Si derivi un modello in rappresentazione esterna (equazioni differenziali e funzione di trasferimento) e interna (spazio di stato) per il seguente circuito dove l'ingresso è la tensione del generatore $v_i(t)$ e l'uscita la tensione sull'induttore $v_L(t)$.



Soluzione

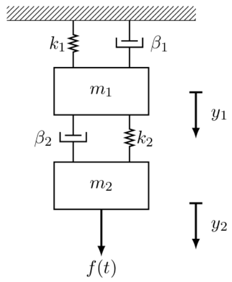
Rappresentazione esterna (FdT): $G(s) = \frac{C_2 L\, s^2}{C_1 C_2 L R\, s^3 + C_2 L\, s^2 + (C_1 R + C_2 R)\, s + 1}$

Rappresentazione interna: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_{C_1} & v_{C_2} & i_L \end{bmatrix}^\top, u = v_i, y = v_L$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, j = 0$$

Esercizio 2

Si derivi un modello in rappresentazione esterna (equazioni differenziali e funzione di trasferimento) e interna (spazio di stato) per il seguente sistema meccanico dove l'ingresso è la forza esterna $f(t)$ e le uscite gli spostamenti y_1 e y_2 (misurati dalla configurazione di equilibrio) delle due masse.



Soluzione

Rappresentazione esterna (FdT): $G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} (k_2 + \beta_2 s) \\ (k_1 + k_2 + (\beta_1 + \beta_2)s + m_1 s^2) \end{bmatrix}$,

$$d(s) = m_1 m_2 s^4 + (\beta_1 m_2 + \beta_2 m_1 + \beta_2 m_2)s^3 + \\ +(k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2 + \beta_1 \beta_2)s^2 + (\beta_1 k_2 + \beta_2 k_1)s + k_1 k_2.$$

Rappresentazione interna: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 & \dot{y}_1 & y_2 & \dot{y}_2 \end{bmatrix}^\top, u = f, y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^\top$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{-\beta_1 - \beta_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{\beta_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_1} & \frac{\beta_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{\beta_2}{m_1} \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

In una popolazione di cellule si distinguono tre stati diversi: cellule giovani, mature e vecchie. Si modelli il fenomeno, considerando una dinamica a tempo discreto, dove, ad ogni passo

- vengono prodotte ex novo cellule giovani, in numero pari ad u (che rappresenta l'ingresso del sistema);
- le cellule giovani diventano mature;
- un ottavo delle cellule mature si duplica, scomparendo (come cellule mature) ed originando due cellule giovani, mentre i rimanenti sette ottavi diventano vecchie (in sostanza, esistono due distinti meccanismi di generazione di cellule nuove: ex novo e da duplicazione di cellule mature);
- delle cellule vecchie, la metà muore e l'altra metà sopravvive rimanendo nello stato di cellula vecchia.

Si è interessati alla totalità della popolazione di cellule (che rappresenta l'uscita del sistema).

Soluzione

Rappresentazione interna: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 : \text{cell.giovani} & x_2 : \text{cell.mature} & x_3 : \text{cell.vecchie} \end{bmatrix}^\top, u = u, y = x_1 + x_2 + x_3$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, j = 0$$

Esercizio 4

Si consideri una popolazione suddivisa in quattro classi: studenti (S), lavoratori (L), disoccupati (D), pensionati (P). La situazione viene monitorata di anno in anno, per cui $S(t)$, $L(t)$, $D(t)$, $P(t)$ sono il numero di persone nelle rispettive classi nell'anno t-esimo (supponiamo che il censimento venga fatto lo stesso giorno di ogni anno, di modo che la numerosità di ogni classe nell'anno t-esimo sia definita senza ambiguità, facendo essa riferimento esclusivamente alla situazione in quel giorno particolare scelto, ad esempio, per fissare le idee, il 1° gennaio). Le regole che definiscono la transizione tra le varie classi sono le seguenti:

- ogni anno il 10% degli studenti si laurea, e di questi l'80% trova immediatamente lavoro, mentre il rimanente 20% diventa disoccupato;
- ogni anno il 5% dei lavoratori perde il lavoro mentre il 3% va in pensione;
- ogni anno il 15% dei disoccupati trova lavoro mentre il 3% va in pensione (con ciò intendendo che raggiunge l'età di pensionamento, a prescindere dal fatto che riesca o meno a percepire effettivamente una pensione)
- un pensionato rimane tale per sempre (trascuriamo in tale modello la possibilità di morte, sia per i pensionati che per le altre classi. Stiamo d'altronde trascurando anche la possibilità di nascite, per cui la classe degli studenti non viene alimentata: il 90% degli studenti rimane studente ed il 10% si laurea, ma non ci sono mai nuove immatricolazioni).

Si scriva un modello di stato a tempo discreto che descriva l'andamento delle 4 classi nel tempo (lo stato essendo il vettore contenente $S(t), L(t), D(t), P(t)$).

Soluzione

Rappresentazione interna: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} S(t) & L(t) & D(t) & P(t) \end{bmatrix}^\top$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.08 & 0.92 & 0.15 & 0 \\ 0.02 & 0.05 & 0.82 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0.03 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + 4\sin^2(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -2\cos^2(x_1(t)) + \frac{1}{2}x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

Si calcolino i punti di equilibrio (se esistono) del sistema al variare dell'ingresso costante $u(t) \equiv \bar{u}$, $\forall t$.

Soluzione

Per $\bar{u} \neq 2$ il sistema non ammette equilibri.
Per $\bar{u} = 2$, si hanno infiniti equilibri della forma $\bar{x} = (x_1, x_2) = (\alpha, -4\sin^2(\alpha))$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) + x_1(t)(1 - \alpha x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_1(t)(1 - \alpha x_2(t)) \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si calcoli il linearizzato del sistema attorno a $\bar{x} = (x_1, x_2) = (0, 0)$. Per quali valori di α (se esistono) il sistema linearizzato risulta asintoticamente/semplicemente stabile?

Soluzione

Sistema linearizzato $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$.
Il sistema linearizzato risulta semplicemente stabile per $\alpha > 1$, mentre non esistono α per cui si ha stabilità asintotica.

Esercizio 7

Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) - x_1(t)u(t) \\ x_2(t+1) = 2x_1(t) - x_2(t)u(t) \end{cases}$$

Si calcolino i punti di equilibrio del sistema (se esistono) al variare dell'ingresso costante $u(t) \equiv \bar{u}$, $\forall t$. Per $\bar{u} = 0$ si calcoli il linearizzato del sistema attorno ai punti di equilibrio trovati (se esistono) e si studi la stabilità del sistema linearizzato.

Soluzione

Per $\bar{u} = -1$ il sistema ammette un unico equilibrio $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1\ \bar{x}_2]^\top = [0\ 0]^\top$.
Per $\bar{u} \neq -1$ il sistema ammette, oltre al precedente, un ulteriore equilibrio $\bar{\mathbf{x}}' = [\bar{x}_1'\ \bar{x}_2']^\top = \left[\frac{(1+\bar{u})^3}{4}\ \frac{(1+\bar{u})^2}{2}\right]^\top$.
Per $\bar{u} \equiv 0$, il sistema linearizzato attorno a $\bar{\mathbf{x}}$ è $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$ (asintoticamente stabile),
mentre attorno a $\bar{\mathbf{x}}'$,$\boldsymbol{\delta}_x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_x(t)$ con $\boldsymbol{\delta}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}'$ (instabile).