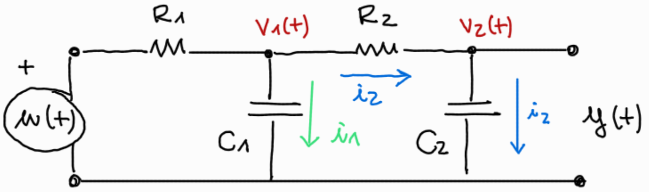
ESERCIZI

(1) modello di sistema a tempo continuo

$\longrightarrow$ doppio bipolo elettrico



$u(t)$: tensione ai morsetti d'ingresso $\in \mathbb{R}$

$y(t)$: tensione ai morsetti in uscita $\in \mathbb{R}$

$x_1(t) = v_1(t)$: tensione ai capi di C_1

$x_2(t) = v_2(t)$: tensione ai capi di C_2

$C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = i(t)$

$C \cdot \dot{v}(t) = i(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{v}_1(t) = \frac{1}{C_1} i_1(t) = \frac{1}{C_1}\left(\frac{u(t) - x_1(t)}{R_1} - \frac{x_1(t) - x_2(t)}{R_2} \right) \\ \dot{x}_2(t) = \dot{v}_2(t) = \frac{1}{C_2} i_2(t) = \frac{1}{C_2}\left(\frac{x_1(t) - x_2(t)}{R_2} \right) \end{cases}$$

$$i_2(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2} = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{R_2}$$

$$i_1(t) = \frac{u(t) - v_1(t)}{R_1} - i_2(t) = \frac{u(t) - x_1(t)}{R_1} - \frac{x_1(t) - x_2(t)}{R_2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{C_1}\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) x_1(t) + \frac{1}{C_1}\left(-\frac{1}{R_2} \right)(-x_2(t)) + \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{R_1} u(t) \\ \quad = \underbrace{-\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} \right)}_{-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{1}{C_1}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2} \right)} x_1(t) + \frac{1}{C_1R_2} x_2(t) + \frac{1}{C_1R_1} u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{C_2R_2} x_1(t) - \frac{1}{C_2R_2} x_2(t) \end{cases}$$

(+)

$y(t) = x_2(t)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & +\frac{1}{C_1R_2} \\ \frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix}}_{F \in \mathbb{R}^{2\times 2}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{G \in \mathbb{R}^{2\times 1}} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H \in \mathbb{R}^{1\times 2}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$J = 0$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = (F, G, H, J) = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{C_1R_1} \\ \frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 \right)$$

▷ la scelta delle variabili di stato è suggerita da considerazioni sulla fisica del sistema (energia accumulata):
le tensioni ai capi dei condensatori godono della proprietà di separazione $\longrightarrow$ qualunque coppia di variabili $(x_1'(t), x_2'(t))$ legata alla coppia $(x_1(t), x_2(t))$ da una mappa lineare gode delle stesse proprietà

$$x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) = v_1(t) + v_2(t)$$
$$x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$F' = T^{-1} F T$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{C_1R_1} \\ \frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{C_2R_2} & \frac{1}{C_1R_1} - \frac{1}{C_2R_2} \\ -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{C_2R_2} & \frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\cancel{\frac{1}{C_1R_1}} - \frac{1}{C_1R_2} + \cancel{\frac{1}{C_2R_2}} + \cancel{\frac{1}{C_1R_1}} - \cancel{\frac{1}{C_2R_2}} & -\frac{1}{C_1R_1} - \frac{1}{C_1R_2} + \boxed{\frac{1}{C_2R_2}} - \frac{1}{C_1R_1} + \boxed{\frac{1}{C_2R_2}} \\ -\cancel{\frac{1}{C_1R_1}} - \frac{1}{C_1R_2} - \cancel{\frac{1}{C_2R_2}} + \cancel{\frac{1}{C_1R_1}} + \cancel{\frac{1}{C_2R_2}} & -\frac{1}{C_1R_1} - \frac{1}{C_1R_2} - \boxed{\frac{1}{C_2R_2}} - \frac{1}{C_1R_1} - \boxed{\frac{1}{C_2R_2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1R_2} & -\frac{2}{C_1R_1} + \frac{2}{C_2R_2} - \frac{1}{C_1R_2} \\ -\frac{1}{C_1R_2} & -\frac{2}{C_1R_1} - \frac{2}{C_2R_2} - \frac{1}{C_1R_2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1' = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \quad \ldots$$
$$\dot{x}_2' = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \quad \ldots$$

2 modello di sistema a tempo discreto

$\longrightarrow$ dinamica di una popolazione di studenti iscritti al corso di laurea triennale in meccatronica

N : # studenti immatricolati il 01/10/20 $\quad t=0$

$x_i(t)$ $i=1,2,3$: # studenti iscritti al 1°/2°/3° anno all'inizio degli A.A. successivi

$t=1$ AA 2021
$t=2$ AA 2022
$t=3$ AA 2023

hp: valide per ogni anno

1) studenti iscritti al 1° anno
20 % abbandonano
60 % sono promossi $\longrightarrow$ 20 % ripetono

2) studenti iscritti al 2° anno
5 % abbandonano
80 % sono promossi $\longrightarrow$ 15 % ripetono

3) studenti iscritti al 3° anno
0 % abbandonano
90 % si laureano $\longrightarrow$ 10 % ripetono

$y_i(t)$ $i=1,2$: # studenti iscritti al corso di laurea all'inizio dell A.A. t
studenti laureati nell' A.A. t

$$x(0)=\begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t+1) = 0.2\, x_1(t)$$
$$x_2(t+1) = 0.6 \cdot x_1(t) + 0.15\, x_2(t)$$
$$x_3(t+1) = 0.8\, x_2(t) + 0.1\, x_3(t)$$

$$x(t+1)=\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0. \\ 0.6 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}}_{F \in \mathbb{R}^{3\times 3}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \qquad G=0$$

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$
$$y_2(t) = 0.9\, x_3(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}}_{H \in \mathbb{R}^{2\times 3}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \qquad J=0$$

③ dinamica di sistemi a tempo discreto

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

•) determinare
- la forma di Jordan di F
- i modi elementari del sistema
- il carattere dei modi

al variare di α

$$\Delta_F = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 + \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & -1+\alpha & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2 + \alpha)(\lambda - \alpha)\cdot\lambda - (-1+\alpha)\cdot 0$$

$$= (\lambda - 2 + \alpha)(\lambda - \alpha)\cdot\lambda = 0$$

$\lambda_a = 2 - \alpha$

$\lambda_b = \alpha$

$\lambda_c = 0$

• se $\alpha = 0$ allora

$\lambda_b = \lambda_c = 0$: $\lambda_1 = 0$ $\quad m_1^a = 2$

$\lambda_a = 2$: $\lambda_2 = 2$ $\quad m_2^a = 1 = m_2^g$

$$m_1^g = 3 - \text{rank}(\underbrace{\lambda_1 I - F}_{\lambda_1 = 0}) = 3 - \text{rank}(-F) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

• se $\alpha = 2$ allora

$\lambda_a = \lambda_c = 0$: $\lambda_1 = 0$ $\quad m_1^a = 2$

$\lambda_b = 2$: $\lambda_2 = 2$ $\quad m_2^a = 1 = m_2^g$

$$m_1^g = 3 - \text{rank}(\underbrace{\lambda_1 I - F}_{\lambda_1 = 0}) = 3 - \text{rank}(-F) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

• se $\alpha = 1$ allora

$\lambda_c = 0$: $\lambda_1 = 0$ $\quad m_1^a = 1 = m_1^g$

$\lambda_a = \lambda_b = 1$: $\lambda_2 = 1$ $\quad m_2^a = 2$

$$m_2^g = 3 - \text{rank}(\underbrace{\lambda_2 I - F}_{\lambda_2 = 1}) = 3 - \text{rank}(I - F) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$$

• se $\alpha \notin \{0, 1, 2\}$ allora

$\lambda_1 = \lambda_a = 2 - \alpha$ $\quad m_1^a = 1 = m_1^g$

$\lambda_2 = \lambda_b = \alpha$ $\quad m_2^a = 1 = m_2^g$

$\lambda_3 = \lambda_c = 0$ $\quad m_3^a = 1 = m_3^g$

• se $\alpha = 0, 2$ allora

$$F_J = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ modi elementari

$\lambda_1 = 0$ con $\begin{matrix} m_1^a = 2 \\ m_1^g = 1 \end{matrix}$: $\delta(t)$, $\delta(t-1)$ CONVERGENTI in TEMPO FINITO

$$\left(m_i^a = \sum_{j=1}^{m_i^g} m_{ij}^r \quad : \quad 2 = \sum_{j=1}^{1} m_{ij}^r \longrightarrow m_{ij}^r = 2 \right.$$

$$\left. \delta(t) \dots \delta(t - \underbrace{m_{ij}^r + 1}_{-2+1=-1}) \right)$$

$\lambda_2 = 2$ con $\begin{matrix} m_2^a = 1 \\ m_2^g = 1 \end{matrix}$: 2^t DIVERGENTE

- se $\alpha \notin \{0, 2\}$ allora

$$F_J = \left[\begin{array}{cc|c} 2-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ modi elementari

$\lambda_1 = 2-\alpha$ con $\begin{matrix} m_1^a = 1 \\ m_1^g = 1 \end{matrix}$: $(2-\alpha)^t$

CONVERGENTE se $1 < \alpha < 3$
LIMITATO se $\alpha = 1$, $\alpha = 3$
DIVERGENTE se $\alpha < 1$, $\alpha > 3$

$\lambda_2 = \alpha$ con $\begin{matrix} m_2^a = 1 \\ m_2^g = 1 \end{matrix}$: α^t

CONVERGENTE se $-1 < \alpha < 1$
LIMITATO se $\alpha = \pm 1$
DIVERGENTE se $\alpha < -1$, $\alpha > 1$

$\lambda_3 = 0$ con $\begin{matrix} m_3^a = 1 \\ m_3^g = 1 \end{matrix}$: $\delta(t)$ CONVERGENTE in TEMPO FINITO

- fissato $\alpha = 0$, determinare tutte e sole le condizioni iniziali $x_0 \in \mathbb{R}^3$ che generano un' evoluzione libera dello stato DIVERGENTE nel TEMPO

$$\alpha = 0 \longrightarrow F = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} f_{11} & \\ & F_{22} \end{bmatrix} \qquad F_{22}$$

$$x_e(t) = F^t x_0 = \begin{bmatrix} f_{11}^t & \\ & F_{22}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}^t x_1(0) \\ F_{22}^t \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^t x_1(0) \\ F_{22}^t \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

F_{22}^t ha autovalori in zero $\longrightarrow$ modi elementari convergenti in tempo finito

2^t DIVERGENTE $\Rightarrow$ $\boxed{x_1(0) \neq 0}$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \neq 0 \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

④ equilibri e stabilità dei sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(t)\,x_2(t) \\ \dot{x}_2 = x_1^2(t) - \alpha\, x_2(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- determinare i punti di equilibrio al variare di α

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(t)\,x_2(t) = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1^2(t) - \alpha\, x_2(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1(t)\,x_2(t) = 0 \\ x_1^2(t) = \alpha\, x_2(t) \end{cases}$$

se $\alpha \neq 0$ allora $x_1^2(t) = \alpha\, x_2(t) \longrightarrow x_2(t) = \dfrac{x_1^2(t)}{\alpha} \longrightarrow x_2(t) = 0$

$-x_1(t)\,x_2(t) \longrightarrow -\dfrac{x_1^3(t)}{\alpha} = 0 \longrightarrow x_1(t) = 0$

$\Rightarrow$ unico punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

se $\alpha = 0$ allora $x_1^2(t) = 0 \longrightarrow x_1(t) = 0$

$\Rightarrow$ infiniti punti di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$

- fissato $\alpha \neq 0$, studiare la stabilità dei punti di equilibrio

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$F = J_f^{(x)}(\bar{x}) \qquad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t)\,x_2(t) \\ x_1^2(t) - \alpha\, x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=\bar{x}} = \left.\begin{bmatrix} -x_2(t) & -x_1(t) \\ 2x_1(t) & -\alpha \end{bmatrix}\right|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\dot{\delta}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \delta_x$$

$$\Delta_F = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + \alpha \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + \alpha) \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\alpha \end{matrix}$$

se $\alpha < 0$: instabilità allora $\bar{x}$ è instabile
se $\alpha > 0$: caso critico