Geo1 - mod B - 20/03/2024

Note Title

$\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{A}'$

$(\mathbb{A}, V)$ $\quad$ $(\mathbb{A}', V')$

$\dim V = n$ $\quad$ $\dim V' = m$

V sp. vett. su K $\quad$ $P_i \in \mathbb{A}$

F è trasf affine se rispetta il calcolo baricentrico

$$F\left(\sum \alpha_i P_i\right) = \sum \alpha_i F(P_i)$$

$\alpha_i \in K$ $\quad$ $\boxed{\sum \alpha_i = 1}$

$$F : \underset{\mathbb{A}}{P_0} + \underset{V}{v} \longmapsto F(P_0) + \varphi(v), \quad \underline{\underline{\varphi}}$$ appl. lineare da V a V' associata

Dare un s.d.r. su $\mathbb{A}$ $<$
- fissare $n+1$ pti in posiz. generale
- fissare un pto $O \in \mathbb{A}$ e una base $v_1, \dots v_n$ di V

Posso ora associare, fissato $\mathcal{R} = \{O, \underbrace{v_1, \dots v_n}_{\mathcal{V}}\}$ ad ogni pto $P \in \mathbb{A}$ le sue coordinate risp. ad $\mathcal{R}$

$$\alpha_{\mathcal{R}}(P) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$$ notazione per non confondersi

$$P = O + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$ ossia $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate del vettore $\underline{P - O}$ risp. alla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$

Sia $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una trasformaz. affine e siano fissati $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sist. di riferimento in $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ rispett.

$\mathcal{R} = \{O, v_1, \dots, v_n\}$ $\quad$ $\mathcal{R}' = \{O', \underbrace{v_1' \dots v_m'}_{\mathcal{V}'}\}$ $\quad$ $\mathcal{V}'$ base di V'

Ad F associo una matrice

$$B = \alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(F) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \; 0 \dots 0 \\ \hline v & A \end{array}\right)$$

$v \in K^m$ e $A \in M_{m,n}(K)$

v: coordinate di $\alpha_{\mathcal{R}'}(F(O))$

A: $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}'}(\varphi)$

B ha la proprietà seguente:

se $P \in \mathbb{A}$ e $\alpha_{\mathcal{R}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ allora

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{R}'}(F(P))$$

$$P = O \qquad \alpha_{\mathcal{R}}(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{R}'}(F(O))$$

Inoltre F è affinità $\Leftrightarrow$ è biettiva $\Leftrightarrow$ φ è isomorfismo

$F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ affinità $\Leftrightarrow$ φ è automorfismo di V

$\Leftrightarrow A \in GL_n(K)$

Esempi di trasformazioni affini sono:

- $F = id_{\mathbb{A}}$ se fisso $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ sist. di rif. su $\mathbb{A}$

$\alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(id_{\mathbb{A}})$ è la matrice di cambio di s. d. riferimento

- Suppongo $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V)$ $\quad V = W \oplus U$

$v = w + u$ unica

$W \cap U = 0$

Sia $\mathbb{L} = P_0 + W$ è sottovarietà affine

$= \{ P_0 + w, \ w \in W \}$

$\pi_{\mathbb{L}}^{U} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ $\rightsquigarrow$ φ associata π_W^U

no affinità

$P_0 + v \longmapsto P_0 + w \in \mathbb{L}$

$\shortparallel$

$P_0 + w + u$

affinità $\sigma_{\mathbb{L}}^{U} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ $\rightsquigarrow$ φ associata è σ_W^U

$P_0 + w + u \longmapsto P_0 + w - u$

Esercizio: Determinare la matrice di $\pi_{\mathbb{L}}^{U}$ risp. al sist. di rif canonico di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{L}$ la retta di eq $2x-y-3=0$ e $U=\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$\mathbb{L}$ è dato dai pti le cui coord risp. al s.d. rif. canonico $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, e_1, e_2\right\}$ sono le soluz. di $2x-y-3=0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}}_{\text{soluz. partic}} + \underbrace{\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}_{\text{soluz di } 2x-y=0,\ y=2x} = P_0 + W$$

$W \oplus U = \mathbb{R}^2$? sì

$\mathbb{L} = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} + \left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$ $\qquad U = \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ $\qquad \underbrace{\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\end{cases}}_{\text{eq param di } U} \rightsquigarrow \underbrace{x=y}_{\text{è eq. cartes. di } U}$

$2x-y-3=0$

descriviamo $\pi_{\mathbb{L}}^{U}: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, $P_0 \longmapsto P_0$

se scelgo $\mathcal{R} = \left\{\underset{P_0}{\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}}, \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}\right\}$ $\qquad \mathcal{V} := \{v_1, v_2\}$

$$B = \alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\pi_{\mathbb{L}}^{U}) = \left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 0&1&0\\0&0&0\end{array}\right) \qquad \text{con } \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\pi_W^U)$$

$\pi_W^U(v_1) = v_1$

$\pi_W^U(v_2) = 0$

Ma l'esercizio chiede $\alpha_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\pi_{\mathbb{L}}^{U})$, $\mathcal{C} = \{\underset{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{O}, e_1, e_2\}$

Metodo I (da non fare): posso considerare $C^{-1}BC$ con $C = \alpha_{\mathcal{C}\mathcal{R}}(id_{\mathbb{A}^2})$

Si calcolerebbe $\underset{\alpha_{\mathcal{R}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{A}^2})}{C^{-1}} = \left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 0&1&1\\-3&2&1\end{array}\right)$ e poi C con alg. di Gauss (ad esempio)

$\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$: coord di P_0 nel s.d.r. canonico; $\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix} \to \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{E}}(id)$

Metodo II $\qquad P \in \mathbb{A}^2 \qquad P = P_0 + w + u = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\pi_{\mathbb{L}}^{U}(P)} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\overbrace{P-\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}}^{\text{vettore}} - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da determinare}}}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in U \quad \text{che ha eq. } x-y=0$$

Preso un $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix}x-0-\lambda\\y+3-2\lambda\end{pmatrix} \in U$ dunque deve essere soluz.

$$x-\lambda-(y+3-2\lambda)=0 \qquad x-y-3+\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-x+y+3}$$

$$\pi_{\mathbb{L}}^{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}+(-x+y+3)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-x+y+3\\3-2x+2y\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{CC}(\pi_{\mathbb{L}}^{U}) = \left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 3 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\ \hline x\\y\end{pmatrix}$$

III metodo

$$P-\mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \pi_{\mathbb{L}}^{U}(P) \in \mathbb{L} \quad \text{che ha eq. } 2x-y-3=0$$

$$\begin{pmatrix}x-\mu\\y-\mu\end{pmatrix} \in \mathbb{L} \iff 2(x-\mu)-(y-\mu)-3=0$$

$$\iff 2x-y-3=\mu$$

$$\pi_{\mathbb{L}}^{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+y+3\\-2x+2y+3\end{pmatrix}$$

Controllo: Calcolo i pti fissi tramite la matrice

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\3&-1&1\\3&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix}1\\3-x+y\\3-2x+2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{cases}3-x+y=x\\3-2x+2y=y\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-y-3=0\\ \cancel{2x-y-3=0}\end{cases}$$ ed è proprio l'eq. di $\mathbb{L}$. come doveva essere!

Esercizio per voi: qual è la matrice di $\sigma_{\mathbb{L}}^{U}$ risp. al s. d. rif $\mathcal{R}$ e risp. al s.d.r. $\mathcal{C}$?

Esercizio

In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dato il piano $\mathbb{L}$ di eq. $x-2z+1=0$ e il vettore $u_0=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ determinare la matrice risp. al s.d.r. canonico della $\sigma_{\mathbb{L}}^{U}$ con $U=\langle u_0\rangle$

$$\mathbb{L}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}}_{P_0=\ \uparrow\ \text{soluz. partic.}}+\underbrace{W}_{\uparrow\ \text{soluz. del sist. omog. associato}} \qquad W \text{ di eq } x-2z=0$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \qquad u_0\notin W \Rightarrow U\oplus W$$

$$\mathbb{A}^3\ni P=P_0+w+u \qquad u\in U \text{ e } w\in W$$

$$=\underbrace{P_0+\lambda\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\pi_{\mathbb{L}}^{U}(P)}+\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\mathbb{L}}^{U}(P)=P_0+w-u=P_0+\lambda\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\underline{P-2\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}$$

Per brevità calcolo solo δ

osservo che $\underbrace{\underset{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}{P}-\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x-\delta\\y+\delta\\z\end{pmatrix}}=\pi_{\mathbb{L}}^{U}(P)\in\mathbb{L}$ deve soddisfare l'eq di $\mathbb{L}$ $x-2z+1=0$

Dunque deve essere $x-\delta-2z+1=0 \Rightarrow \delta=x-2z+1$

$$\sigma_{\mathbb{L}}^{U}(P)=P-2\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-2(x-2z+1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+4z-2\\2x+y-4z+2\\z\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -x & +4z \\ & 2x+y & -4z \\ 0 & & +z \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{CC}(\sigma_{\mathbb{L}}^{U}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}\right) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \hline -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{coord di } P_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \hline -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{coord di } \sigma_{\mathbb{L}}^{U}(P_0)}$$

ok. P_0 è unito! e così tutti i pti di $\mathbb{L}$.

Se avessi chiesto risp. a un s. di rif. a piacere avrei scelto $\mathcal{R} = \left\{ P_0, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{V}} \right\}$

$$\alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\sigma_{\mathbb{L}}^{U}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

matrice di π_W^U risp. alla base $\mathcal{V}$

Esercizio Ricavare la matrice di $\pi_{\mathbb{L}}^{U}$ risp. a $\mathcal{C}$.

$(\mathbb{A}, V, +)$

Lemma Sia $F: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una affinità.

F manda r in $F(r)$ parallela ad r comunque io scelga r $\overset{(*)}{\iff}$ l'appl. lineare associata ad F è $\varphi = \alpha \cdot id_V$ per un qualche $\alpha \in K \setminus \{0\}$

$\overset{\text{evidente}}{\iff}$ la matrice associata ad F risp. ad un qualunque s. di rif è $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\,0\ldots \\ \hline v & \alpha \mathbb{1} \end{array}\right)$

Dim $(*)$ $\Leftarrow$) Sia F t.c. $\varphi = \alpha\, id_V$

Sia $r \subseteq \mathbb{A}$ retta, $r: P + \langle w \rangle$, $w \in V$

$F(r) = \{F(P+\alpha w),\ \alpha\in K\} = \{F(P)+\alpha\varphi(w),\ \alpha\in K\}$

$= \{F(P)+\underline{\alpha\alpha} w,\ \alpha\in K\} = F(P)+\langle w\rangle$

$\Rightarrow F(r) \,/\!/\, r$

$\Leftarrow)$ Se V ha dim 1 banale

Suppongo $\dim V \geq 2$. Siano $w, w' \in V$ <u>l. indip.</u>
Considero le rette $P+\langle w\rangle$, $P+\langle w'\rangle$, $P+\langle w+w'\rangle$
con P un pto fissato di $\mathbb{A}$.

$$\left.\begin{aligned} F(P+\langle w\rangle) &= F(P)+\langle w\rangle \\ F(P+\langle w'\rangle) &= F(P)+\langle w'\rangle \\ F(P+\langle w'+w\rangle) &= F(P)+\langle w+w'\rangle \end{aligned}\right\} \text{per ipotesi}$$

Ma questo significa che $\varphi(w)\in\langle w\rangle$, $\varphi(w')\in\langle w'\rangle$
$\varphi(w+w')\in\langle w+w'\rangle$

$$\varphi(w+w') = \alpha(w+w') = \alpha w + \alpha w'$$
$$\varphi(w)+\varphi(w') = \beta w + \gamma w'$$

$$\alpha w + \alpha w' = \beta w + \gamma w' \iff \underbrace{(\alpha-\beta)}_{=0} w + \underbrace{(\alpha-\gamma)}_{=0} w' = 0$$

$\Rightarrow$ dunque abbiamo $\varphi(w) = \alpha w$ e $\varphi(w') = \alpha w'$
comunque scelgo w, w' l. indip.
Per il fatto che w' è scelto arbitrariamente (l. indip)
deduco che $\varphi = \alpha\, id$. $\boxtimes$

Vi sono due tipi di affinità come nel Lemma:

<u>traslazioni</u> $\varphi = id$ $\quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\cdots0 \\ \hline v & \mathbb{1} \end{array}\right) = \alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(F)$

$P \mapsto P+v \quad v\in V = K^n$

<u>omotetie</u> (centrali) sono tali che $\varphi = \alpha\, id \quad \alpha\neq 0,1$

traslazioni: $v=0$, $id=F$ tutti i pti sono uniti
$v\neq 0$ non ho pti uniti

omotetie : ho un pto unito P_0
e se scelgo P_0 come origine di $\mathcal{R}$

$$\alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\text{omotetia}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \alpha \mathbb{1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

Infatti:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline v & \alpha \mathbb{1} \end{array}\right) = \alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(F)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & \alpha \mathbb{1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

↑ coord. di un pto unito, se esiste

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & \underbrace{(\alpha-1)\mathbb{1}}_{\text{invertibile}} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se $\alpha \neq 1$ $\qquad v + [(\alpha-1)\mathbb{1}]x = 0 \qquad x = -\frac{v}{\alpha-1} = \frac{v}{1-\alpha}$

C'è esattamente un $\underbrace{\text{pto unito}}_{\text{detto centro dell'omotetia.}}$ di coordinate $\frac{v}{1-\alpha}$

NB Le omotetie non formano un sottogruppo delle affinità.
Invece {omotetie} ∪ {traslazioni} sì

Esercizio (teorico)
Siano F, G omotetie. Allora

o $F \circ G$ è omotetia e i 3 centri sono allineati
oppure $F \circ G$ è una traslazione di direzione // alla retta per i 2 centri delle omotetie

$$F \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & \alpha \mathbb{1} \end{array}\right) \qquad G \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline w & \beta \mathbb{1} \end{array}\right)$$

$F \circ G \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v+\alpha w & \alpha\beta 1\!\!1 \end{array}\right)$

se $\alpha\beta \neq 1$ sarà omotetia di centro $\dfrac{v+\alpha w}{1-\alpha\beta}$

[Verificare che $\dfrac{v}{1-\alpha}$, $\dfrac{w}{1-\beta}$, $\dfrac{v+\alpha w}{1-\alpha\beta}$ sono allineati]

Sugg: usare calc. baricentrico $\lambda \cdot (\quad) + \mu(\quad) =$ esistono $\lambda, \mu \in K$ $\lambda + \mu = 1$

Se invece $\alpha\beta = 1$, $F \circ G$ è una traslazione di direzione $v+\alpha w$

da dimostrare che $v+\alpha w \parallel \dfrac{v}{1-\alpha} - \dfrac{w}{1-\beta}$ con $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$

<u>Esercizio</u> Costruire la matrice resp. al s.d.r. canonico

dell' omotetia che manda

$r_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ in $r_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$s_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ in $s_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\vdots$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & & & \\ -5/2 & & \frac{1}{2} 1\!\!1 & \\ 2 & & & \end{array}\right)$$