riassunto

DINAMICA di SISTEMI

	a tempo continuo	a tempo discreto
	$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$ $y(t) = Hx(t) + Ju(t)$	$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ $y(t) = Hx(t) + Ju(t)$

dominio del tempo

a tempo continuo

$x(t) = x_\ell(t) + x_F(t)$

- $x_\ell(t) = e^{Ft} \cdot x_0$
- $x_F(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$

$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$

- $y_\ell(t) = He^{Ft} \cdot x_0$
- $y_f(t) = \int_0^t \left(H e^{F(t-\tau)} G + J\delta(t-\tau)\right) u(\tau)\, d\tau$

$= \int_0^t w(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

↳ risp. impulsiva

→ modi elementari : λ_i

$e^{\lambda_i t}, \; t e^{\lambda_i t}, \ldots, \frac{t^{m_{ij}-1}}{(m_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t}$

a tempo discreto

$x(t) = x_\ell(t) + x_F(t)$

- $x_\ell(t) = F^t x_0$
- $x_F(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G u(k)$

$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$

- $y_\ell(t) = HF^t x_0$
- $y_f(t) = \sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-1-k} G u(k) + Ju(t)$

$= \sum_{k=0}^{t-1} w(t-k)\, u(k)$

$$w(t) = \begin{cases} J & t=0 \\ HF^{t-1}G & t \neq 0 \end{cases}$$

↳ risp. impulsiva

→ modi elementari : λ_i

$\binom{t}{0} \lambda_i^t \; \ldots \; \binom{t}{m_{ij}-1} \lambda_i^{t-m_{ij}+1}$

$\delta(t) \; \ldots \; \delta(t - m_{ij} - 1)$

dominio della frequenza

[trasformate di Laplace]

$X(s) = X_\ell(s) + X_F(s)$

$\overset{!}{=} (sI-F)^{-1} x_0 + (sI-F)^{-1} G\, U(s)$

$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_F(s)$

$\overset{!}{=} H(sI-F)^{-1} x_0 + \underbrace{\left(H(sI-F)^{-1}G + J\right)}_{W(s)} U(s)$

$W(s)$ matrice di trasferimento $= \mathcal{L}[w(t)]$

[trasformata Zeta]

$X(z) = X_\ell(z) + X_F(z)$

$\overset{!}{=} (zI-F)^{-1} z \cdot x_0 + (zI-F)^{-1} G\, U(z)$

$Y(z) = Y_\ell(z) + Y_F(z)$

$\overset{!}{=} H(zI-F)^{-1} z \cdot x_0 + \underbrace{\left(H(zI-F)^{-1}G + J\right)}_{W(z)} U(z)$

$W(z)$ matrice di trasferimento $= \mathcal{Z}[w(t)]$

- **EVOLUZIONE nel DOMINIO delle FREQUENZA**

trasformata zeta $\quad V(z) = \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) \cdot z^{-t}$

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = F x(t) + G u(t) \\ y(t) = H x(t) + J u(t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\ \mathcal{Z}\ } \begin{cases} \mathcal{Z}[x(t+1)] = F \cdot \mathcal{Z}[x(t)] + G\, \mathcal{Z}[u(t)] \\ \mathcal{Z}[y(t)] = H \cdot \mathcal{Z}[x(t)] + J\, \mathcal{Z}[u(t)] \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[x(t)] = X(z) \in \mathbb{R}^n$$
$$\mathcal{Z}[u(t)] = U(z) \in \mathbb{R}^m$$
$$\mathcal{Z}[y(t)] = Y(z) \in \mathbb{R}^p$$

$$\begin{cases} z X(z) - z x_0 = F \cdot X(z) + G\, U(z) \\ Y(z) = H \cdot X(z) + J\, U(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (zI - F) X(z) = z \cdot x_0 + G\, U(z) \\ Y(z) = H X(z) + J\, U(z) \end{cases}$$

$$X(z) = (zI-F)^{-1} z\, x_0 + (zI-F)^{-1} G\, U(z) = X_\ell(z) + X_F(z)$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= H \cdot (zI-F)^{-1} z\, x_0 + H(zI-F)^{-1} G U(z) + J\, U(z) \\ &\overset{!}{=} H(zI-F)^{-1} z\, x_0 + \left(\boxed{H(zI-F)^{-1} G + J}\right) U(z) \\ &\overset{!}{=} H(zI-F)^{-1} z \cdot x_0 + W(z)\, U(z) \\ &\overset{!}{=} Y_\ell(z) + Y_F(z) \end{aligned}$$

matrice di trasferimento

$$W(z) \overset{!}{=} \mathcal{Z}[w(t)] \in \mathbb{R}^{p \times m}$$
$$= \frac{Y_F(z)}{U(z)}$$

ANALISI di STABILITÀ

Stabilità : proprietà legata al concetto di ritornare o rimanere in un certo stato entro certi limiti o condizioni desiderate nel tempo, nonostante le perturbazioni o le variazioni interne o esterne

- Stabilità di punti di equilibrio : come il sistema risponde alle perturbazioni intorno a quel punto stesso in cui le sue variabili di stato rimangono costanti nel tempo
- Stabilità del sistema : proprietà che dipende da tutti i punti di equilibrio di un sistema e dalle loro interazione dinamica

(=) solo per sistemi LTI

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio

① semplicemente stabile (LIMITATEZZA)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\| \bar{x} - x_0 \| \leq \delta \Rightarrow \| x(t) - \bar{x} \| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

② asintoticamente stabile (LIMITATEZZA + ATTRATTIVITÀ)

-) semplicemente stabile
-) $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x} \quad \forall x_0$ suff. vicino a $\bar{x}$

③ instabile : non semplicemente stabile

STABILITÀ dei SISTEMI LINEARI (alla Lyapunov)

Stabilità

stabilità interna

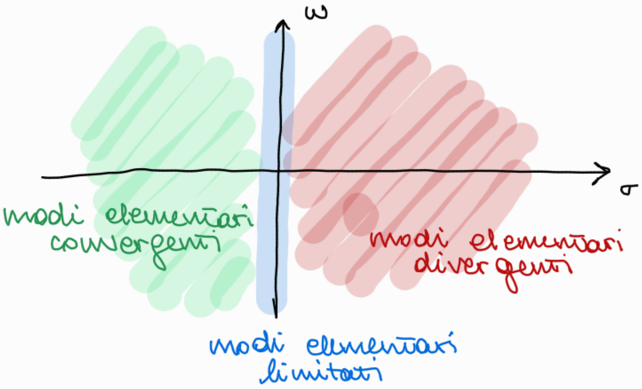
- asintotica : partendo da una condizione iniziale arbitraria, nel limite temporale infinito, le sue soluzioni si avvicinano progressivamente allo stato di equilibrio
- semplice : partendo da una condizione iniziale arbitraria, le soluzioni possono avvicinarsi all'equilibrio nel tempo senza oscillazioni significative ma potrebbero non convergere all'equilibrio nel limite temporale infinito

stabilità esterna

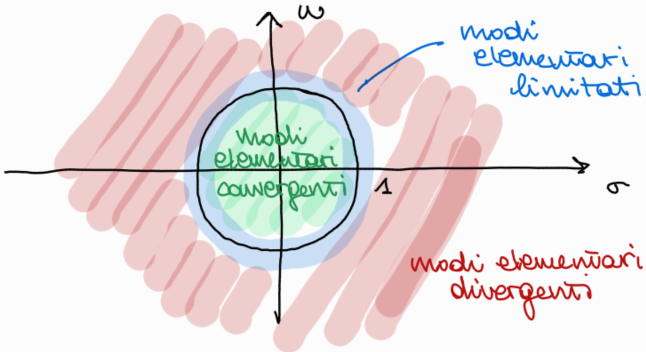
- BIBO (Bounded Input - Bounded Output): quando l'ingresso è limitato in ampiezza, l'uscita rimane limitata in ampiezza

$\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$

a tempo continuo



a tempo discreto



	$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$	$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$
	$\{\lambda_i\}_{i=1}^{k} = \Lambda_F$	$\{\lambda_i\}_{i=1}^{k} = \Lambda_F$
stabilità asintotica	$Re[\lambda_i] < 0 \quad \forall i$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1 \quad \forall i$
stabilità semplice	$Re[\lambda_i] \leq 0 \quad \forall i$ e $m_i^a = m_i^g$ se $Re[\lambda_i] = 0$	$\lvert\lambda_i\rvert \leq 1 \quad \forall i$ e $m_i^a = m_i^g$ se $\lvert\lambda_i\rvert = 1$
instabilità	$\exists\, \lambda_i$ con $Re[\lambda_i] > 0$ o $Re[\lambda_i] = 0$ e $m_i^a > m_i^g$	$\exists\, \lambda_i$ con $\lvert\lambda_i\rvert > 1$ o $\lvert\lambda_i\rvert = 1$ e $m_i^a > m_i^g$

BIBO stabile se ogni vettore d'ingresso $u(t)$ con componenti limitate in t
$\longrightarrow$ uscita forzata corrispondente

$$y_f(t) = \int_0^t \left(He^{F(t-\tau)}G + J\delta(\tau - t)\right) u(\tau)\, d\tau$$

$$y_f(t) = \sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-1-k} G\, u(k) + J u(t)$$

con componenti limitate in t

Proposizione

Siano $\{p_i\}_{i=1}^{r}$ i poli della matrice di trasferimento $W(s)$ / $W(z)$ del sistema a tempo continuo / tempo discreto ridotta ai minimi termini, cioè dopo tutte le cancellazioni zero-poli dei suoi elementi. $r \leq n$

Il sistema è BIBO stabile se e solo se

$$\begin{cases} Re(p_i) < 0 \quad \forall i \in \{1 \dots r\} & : \text{nel caso di sistemi a tempo continuo} \\ \lvert p_i \rvert < 1 \quad \forall i \in \{1 \dots r\} & : \text{nel caso di sistemi a tempo discreto} \end{cases}$$

$\{p_i\}_{i=1}^{r} \subseteq \{\lambda_i\}_{i=1}^{k} \qquad r \leq k \leq n$

Stabilità asintotica $\longrightarrow$ Stabilità BIBO

$\downarrow$

Stabilità semplice

STABILITÀ di SISTEMI non LINEARI (alla Lyapunov)

- sistemi a tempo continuo

teorema

sia $\dot{\delta x} = F\,\delta x(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno al punto di equilibrio $\bar{x}(t)$

$$\left(F = J_f^{(x)}(\bar{x}) \,,\quad \delta x = x - \bar{x} \right)$$

siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ gli autovalori di F

allora

1) se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile allora
$\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non linearizzato

2) se il sistema linearizzato è instabile allora
$\bar{x}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non linearizzato

esempi

1. $\dot{x} = \sin x = f(x(t))$

$\bar{x}$: $\sin x = 0$ $<$ $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$

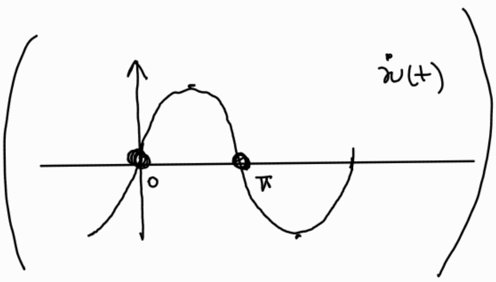
$$F = \left.\frac{\partial f(x(t))}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \left.\frac{d \sin x}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \cos x \Big|_{x=\bar{x}} = \cos \bar{x}$$

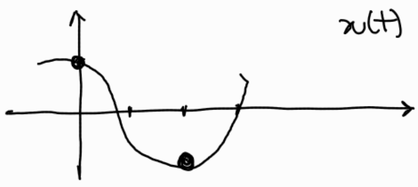
$\bar{x} = 0 \longrightarrow \dot{\delta x} = \cos\bar{x} \cdot \delta x = 1 \cdot \delta x \longrightarrow \lambda = 1$

$\delta x = x - \bar{x} = x$ $\qquad \bar{x} = 0$ instabile

$\bar{x} = \pi \longrightarrow \dot{\delta x} = \cos\bar{x} \cdot \delta x = -1 \cdot \delta x \longrightarrow \lambda = -1$

$\delta x = x - \bar{x} = x - \pi$ $\qquad \bar{x} = \pi$ asint. stabile





2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\bar{x} : \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{matrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3x_1^2-x_2^2 & -1-2x_1x_2 \\ 1-2x_1x_2 & 1-x_1^2-3x_2^2 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & +1 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1$$

$$\overset{!}{=} \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1$$

$$\overset{!}{=} \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$$Re[\lambda_{1,2}] = 1 > 0$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è pt. eq. instabile

3. $\dot{x} = \alpha \cdot x^3 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$\bar{x} : \quad \alpha \cdot x^3 = 0 \qquad \bar{x} = 0$

$\bar{x} = 0 : \quad \dot{\delta x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \cdot \delta x = \left. 3 \cdot \alpha \cdot x^2 \right|_{x=0} \cdot \delta x = 0$

$\delta x = x - \bar{x} = x \qquad\qquad \lambda = 0$

?

⚠ esiste il caso critico : $Re[\lambda_i] = 0$

- sistemi a tempo discreto

teorema

sia $\delta(t+1) = F\delta(t)$ il sistema linearizzato di $x(t+1) = f(x(t))$ attorno al punto di equilibrio $\bar{x}(t)$

$\left(F = J_f^{(x)}(\bar{x}) \ , \ \delta x = x - \bar{x} \right)$

siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ gli autovalori di F

allora

1) se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile allora
$\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non linearizzato

2) se il sistema linearizzato è instabile allora
$\bar{x}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non linearizzato

⚠ caso critico : $|\lambda_i| = 1$