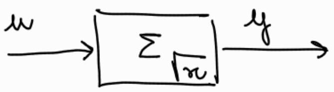
riassunto lezioni precedenti

(1) modellizzazione dei sistemi dinamici

→ sistemi dinamici (causali)
tempo-invarianti lineari / linearizzati LTI
a tempo continuo o tempo discreto
autonomi o non autonomi

→ rappresentazione interna o di stato



$x \in \mathbb{R}^n$
$u \in \mathbb{R}^m$
$y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = F x(t) + G u(t)$$
$$y(t) = H x(t) + J u(t)$$

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$
$G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $J \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t)$$
$$y(t) = H x(t) + J u(t)$$

⇒ analisi della dinamica (2)

A. RICHIAMI e APPROFONDIMENTI di ALGEBRA LINEARE

A.1 Spazi vettoriali e trasformazioni lineari

- vettori e basi in $\mathbb{R}^n$

  - spazio vettoriale $V = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$
    - insieme di vettori
    - campo di scalari
    - operazioni di somma di vettori, prodotto vettore - scalare

  - $\{v_1 \dots v_k\} \in \mathbb{R}^n$
    - linearmente dipendenti se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \;\not\Rightarrow\; \alpha_1 \dots \alpha_k = 0 \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$
    - linearmente indipendenti se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \;\rightarrow\; \alpha_1 = \dots \alpha_k = 0 \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$

esempio

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ +2\alpha_2 = \alpha_3 \\ -\alpha_2 + \alpha_2 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{lin. indipendenti}$$

  - $\{v_1 \dots v_k\} \in \mathbb{R}^n$ base dello spazio vettoriale $V \subseteq \mathbb{R}^n$ quando
    - generano V : $\forall v \in V \; \exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$
      $V = \text{span}\{v_1 \dots v_k\}$
    - linearmente indipendenti

esempio

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) metodo intuitivo

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha_1, \alpha_2 = 0$$

$$\mathcal{B} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

② metodo sistematico : procedimento per eliminazione gaussiana

$$A = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} \longrightarrow$$ portare A in forma a scala tramite trasformazioni elementari

- $H_{ij}(r)$: sommare alla riga i la riga j moltiplicata per r
- H_{ij} : scambiare la riga i e la riga j
- $H_i(r)$: moltiplicare la riga i per r

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

⚠ la base non è unica

- Trasformazioni lineari

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

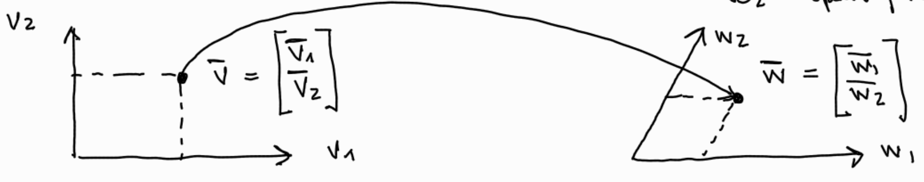
$\longrightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

- univocamente individuate dalla sua restrizione ai vettori di una qualsiasi base di $\mathbb{R}^n$

- $\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}_1 : \text{base di } \mathbb{R}^n \\ \mathcal{B}_2 : \text{base di } \mathbb{R}^m \end{array}\right\}$ $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ descrive come le coordinate (rispetto a $\mathcal{B}_1$) di vettori in $\mathbb{R}^n$ vengono mappate in coordinate (rispetto a $\mathcal{B}_2$) di vettori in $\mathbb{R}^m$

$n = 2$ $\qquad\qquad$ $m = 2$

$\mathcal{B}_1 = \text{span}\{v_1, v_2\}$ $\qquad \bar{w} = f(\bar{v})$ $\qquad \mathcal{B}_2 = \text{span}\{w_1, w_2\}$



$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

•) $\mathcal{B}_1$: base di $\mathbb{R}^n$ $\qquad$ $\mathcal{B}_1'$: altra base di $\mathbb{R}^n$

$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \sim f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$: cambio di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_1'$

$F' = T^{-1} F T$

A.2 principali proprietà e operazioni matriciali

• <u>autovalori e autovettori</u>

$F \in \mathbb{R}^{m \times n}$

•) nucleo $\qquad$ $\operatorname{Ker} F = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid Fv = 0 \}$

•) immagine $\qquad$ $\operatorname{Im} F = \{ w \in \mathbb{R}^m \mid w = Fv, \ v \in \mathbb{R}^n \}$

•) rango $\qquad$ rank = # righe (colonne) linearmente indipendenti = dim Im F

esempio

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

•) nucleo

$$F \cdot v = 0 \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 = 0 \\ -2v_1 + 4v_2 = 0 \\ v_1 + 3v_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 2v_2 \\ v_1 = 2v_2 \\ v_1 = -3v_3 \end{cases} \longrightarrow v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{1}{2}\alpha \\ -\frac{1}{3}\alpha \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} F = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ +1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix} \right\}$$

•) immagine

A) $v_2 = -2v_1 + \frac{1}{3} v_3$

$$\mathcal{B} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

B) $$F^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-3/2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\to \operatorname{Im} F = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

•) rank $F = 2$

• $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$v \in \mathbb{C}^n$ autovettore
$\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore : $\lambda v = F v$

• $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ di F sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1^a} (\lambda - \lambda_2)^{m_2^a} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k^a}$$

•) m_i^a : molteplicità algebrica

•) m_i^g : molteplicità geometrica

$$m_i^g = \dim(\ker(\lambda_i I - F)) = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - F)$$

per ogni $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$n = \dim(\ker A) + \dim(\operatorname{Im} A)$$
$$\overset{!}{=} \dim(\ker A) + \operatorname{rank} A$$

- se $m_i^a = m_i^g \quad \forall \lambda_i \in \Lambda_F$
allora F è diagonalizzabile
$\exists T \in \mathbb{R}^{n \times n}$: cambio di base tale che $F_D = T^{-1} F T$

esempio

1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) \overset{!}{=} \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 1 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -i \\ \lambda_2 = +i \end{cases}$$

$$m_1^a = m_2^a = 1$$
$$m_1^g = m_2^g = 1$$

$\longrightarrow$ diagonalizzabile

•) $\lambda_1 = -i$: autovettore $\lambda_1 v_1 = \lambda_1 F_1$

$$(\lambda_1 I - F) v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ +i\alpha \end{bmatrix}$$

•) $\lambda_2 = +i$: autovettore $(\lambda_2 I - F) v_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -i\alpha \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \quad \leadsto \quad T^{-1} F T = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = F_D$$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) \longrightarrow \lambda_{1,2} = 1$

$m^a = 2$
$m^g = 2$

$\longrightarrow$ diagonalizzabile

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$

$$\overset{!}{=} \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1$$

$$\overset{!}{=} \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 0 \qquad m_1^a = m_1^g = 1$

$\lambda_2 = 2 \qquad m_2^a = m_2^g = 1$

$\longrightarrow$ diagonalizzabile

4. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$

$$\overset{!}{=} \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)^2$$

$\lambda = 1 \qquad m^a = 2$

$$m^g = n - \text{rank}(\lambda I - F)$$

$$\overset{!}{=} 2 - \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 - 1 = 1 < m^a$$

$\longrightarrow$ non diagonalizzabile

$\boxtimes$

- <u>inversa e determinante</u>

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

elemento in (i,j)

per ogni $i = 1 \dots n$ (indice riga) : $\det(F) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{\bar{i}\bar{j}})$

per ogni $j = 1 \dots n$ (indice colonna) : $\det(F) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{\bar{j}\bar{i}})$

matrice $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ derivata da F epurata da i-esima riga e j-esima colonna o viceversa

F è invertibile se e solo se $\det(F) \neq 0$ $\longrightarrow$ $\exists\, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $FH = HF = I$

$H = F^{-1}$

$$F^{-1} = \frac{\text{adj}(F)}{\det(F)}$$

matrice aggiunta

$$\left[\text{adj}(F)\right]_{ij} = (-1)^{i+j} \det(F_{\bar{j}\bar{i}})$$

esempio

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(F) = 1 \cdot (-1)^2 \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + 0 \cdot (-1)^3 \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$+ 0 \cdot (-1)^4 \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$F^{-1} = \frac{1}{\det F} \cdot \operatorname{adj} F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxtimes$

- <u>matrici triangolari e triangolari a blocchi</u>

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

triangolare
- superiore $\quad F = \begin{bmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{bmatrix}$
- inferiore $\quad F = \begin{bmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{bmatrix}$

•) gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale

•) $[F^{-1}]_{ii} = \dfrac{1}{F_{ii}}$

triangolare a blocchi
- superiore $\quad F = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$
- inferiore $\quad F = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$

•) gli autovalori sono l'unione degli autovalori dei blocchi sulla diagonale

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad \Lambda(F) = \Lambda(F_{11}) \cup \Lambda(F_{22})$$

•) F^{-1} è ancora triangolare a blocchi

- <u>matrici in forma di Jordan</u>

$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad \{\lambda_i\}_{i=1}^{k} \quad : \quad m_i^a$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m_i^g$

allora

- $\forall \lambda_i \quad m_i^a = m_i^g \quad \Longrightarrow \quad F$ diagonalizzabile
- $\exists\, i$ tale che $m_i^a > m_i^g \quad \Longrightarrow \quad F$ NON diagonalizzabile

<u>ma</u>

trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o quasi diagonali

FORMA di JORDAN

THM

Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ gli autovalori di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Esiste $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cambio di base tale che

$$F_J = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\lambda_i, m_i^g} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i^a \times m_i^a}$$

blocco associato all' autovalore λ_i

$$J_{\lambda_i, j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_{ij}^r \times m_{ij}^r}$$

miniblocco j associato all' autovalore λ_i

$$m_i^a = \sum_{j=1}^{m_i^g} m_{ij}^r$$

F_J è unica a meno di permutazioni di blocchi e miniblocchi

▷ se $m_i^a \le 3$ $\forall i$ allora è possibile calcolare F_J conoscendo solo $\{\lambda_i\}$, $\{m_i^a\}$, $\{m_i^g\}$

esempio

1. $$F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\left((\lambda-3)(\lambda-1)+1\right)$$

$$= (\lambda-2)(\underbrace{\lambda^2-4\lambda+4}_{(\lambda-2)^2})$$

$$= (\lambda-2)^3$$

$\lambda = 2$ $\quad m^a = 3$

$$m^g = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 < m^a$$

$\longrightarrow$ F non diagonalizzabile

$F_J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$F_J = J_\lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$m^a = 3$
$m^g = 2$

$$= \left[\begin{array}{c|c} J_{\lambda_1} & \\ \hline & J_{\lambda_2} \end{array}\right]$$

$J_{\lambda_1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
$J_{\lambda_2} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

$$J_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J_{\lambda_2} = \lambda_2 = 2$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\boxtimes$

- <u>esponenziale di matrice</u>

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\boxed{e^F = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^k}{k!}}$$

•) $e^0 = I$

•) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ commutano $AB = BA$ allora $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\alpha A, \beta A$ commutano allora $e^{\alpha A + \beta A} = e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A}$
$\alpha = 1$, $\beta = 1$ allora $e^0 = e^A \cdot e^{-A} = I \rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$

•) $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile $\longrightarrow e^{TFT^{-1}} = T e^F T^{-1}$

•) $\frac{d}{dt} e^{Ft} = F \cdot e^{Ft}$, $t \in \mathbb{R}$