2 DINAMICA DEI SISTEMI DINAMICI

dinamica: evoluzione temporale di un sistema, ovvero come le sue variabili cambiano rispetto al tempo e/o in relazione al comportamento di altre variabili indipendenti

In accordo con la meccanica newtoniana, *l'evoluzione dei sistemi dinamici è implicitamente definita* da una relazione che proietta lo stato del sistema *solo per un breve intervallo nel futuro*.
Prima dell'avvento dei calcolatori veloci, risolvere un sistema dinamico richiedeva l'impiego di tecniche matematiche sofisticate e poteva essere realizzato solo per una limitata categoria di sistemi dinamici.

2.1 Dinamica dei sistemi a tempo continuo

Si consideri il sistema LTI a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{p\times m} \end{matrix}$$

2.1.1 Evoluzione nel dominio del tempo

Nel caso di un sistema **autonomo** scalare $(x(t) \in \mathbb{R}, u(t) = 0)$

$$\dot{x}(t) = fx(t),\ x(0) = x_0 \qquad \text{allora} \qquad x(t) = e^{ft}x_0$$

$\to$ risoluzione dell'equazione differenziale

Analogamente, nel caso di un sistema **autonomo** ma multidimensionale $(\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) = \mathbf{0})$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad \text{allora} \qquad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0$$

Come calcolare $e^{\mathbf{F}t}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

- calcolo diretto (utile in casi "semplici" e/o "strutturati")
  - in base alla definizione

$$e^{\mathbf{F}t} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{\mathbf{F}^k t^k}{k!} \triangleq \left(\mathbf{I} + \mathbf{F}t + \frac{\mathbf{F}^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{F}^k t^k}{k!} + \dots\right)$$

esempio

1. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(\mathbf{F}t)^n = \underbrace{\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\cdots\mathbf{F}}_{n \text{ volte}}\, t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{\mathbf{F}t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

in generale
per matrici diagonali

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{\mathbf{F}t} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

2. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $\mathbf{N}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{N}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,...

(ii) $e^{\mathbf{I}+\mathbf{N}} = e^{\mathbf{I}} e^{\mathbf{N}}$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $e^{\mathbf{F}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $\mathbf{N}^0 = I$, $N^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,...

(ii) $e^{\mathbf{I}+\mathbf{N}} = e^{\mathbf{I}} e^{\mathbf{N}}$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $e^{\mathbf{F}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

in generale
per mtrici quasi-diagonali

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{\mathbf{F}t} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

4. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{F}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^2 = -\mathbf{I}$, $\mathbf{F}^3 = -\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^4 = \mathbf{I}$,... $\quad\Longrightarrow\quad$ $e^{\mathbf{F}t} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$\boxtimes$

- diagonalizzazione di $\mathbf{F}$ (utile in casi "più complessi")
  - ▶ trovare una matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \mathbf{F}_J$

$$e^{\mathbf{F}t} = \mathbf{T} e^{\mathbf{F}_J t} \mathbf{T}^{-1}$$

Si noti che

$$\textbf{1.}\ \mathbf{F}_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{J}_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J}_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{\lambda_k} \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow \qquad e^{\mathbf{F}_J t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{\mathbf{J}_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{\mathbf{J}_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{\mathbf{J}_{\lambda_k} t} \end{array}\right]$$

$$\textbf{2.}\ \mathbf{J}_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{J}_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J}_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{\lambda_i,m_i^g} \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow \qquad e^{\mathbf{J}_{\lambda_i} t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{\mathbf{J}_{\lambda_i,1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{\mathbf{J}_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{\mathbf{J}_{\lambda_i,m_i^g} t} \end{array}\right]$$

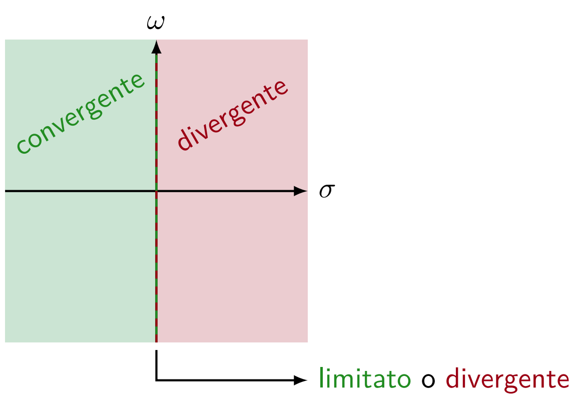
$$\textbf{3.}\ \mathbf{J}_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{\mathbf{J}_{\lambda_i,j} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m_{ij}^r-1}}{(m_{ij}^r-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t}, \ldots, \frac{t^{m_{ij}^r-1}}{(m_{ij}^r-1)!}e^{\lambda_i t}$$ **modi elementari** del sistema

si verifica che

1. il numero di modi *distinti* associati a λ_i è uguale alla dimensione del più grande miniblocco di $\mathbf{J}_{\lambda_i}$
2. se $\mathbf{F}$ è diagonalizzabile allora i modi elementari sono esponenziali *puri* $(e^{\lambda_i t})$
3. se $\lambda = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{F}$ allora anche $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{F}$
   i modi associati a $\lambda \in \mathbb{C}$ sono *reali* $(t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t),\ t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t))$

   in particolare per $\lambda_i \in \mathbb{C}$ si ha che $t^{k_i}e^{\lambda_i t} = t^{k_i}e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i}e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i\sin(\omega_i t))$
   con (*carattere dei modi*)



Dato il sistema LTI **autonomo** multidimensionale ($\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$)

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$	allora	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_l(t)$: **evoluzione libera**
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$	allora	$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{H}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0$ $=$ combinazione lineare di vettori dei modi elementari	

in particolare, sia $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$, allora (*comportamento asintotico del sistema*)

$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i$	$\iff$	$e^{\mathbf{F}t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$	$\implies \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 \xrightarrow{t\to\infty} \mathbf{0}$
$\Re[\lambda_i] \le 0,\ \forall i$ e $m_i^a = m_i^g$ se $\Re[\lambda_i] = 0$	$\iff$	$e^{\mathbf{F}t}$ limitata	$\implies \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0$ limitata
$\exists\, \lambda_i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$ o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $m_i^a > m_i^g$	$\iff$	$e^{\mathbf{F}t}$ non limitata	$\implies \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0$? dipendente da $\mathbf{H}, \mathbf{x}_0$

Dato il sistema LTI **NON autonomo** multidimensionale ($\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$)

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$	allora	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)$	$\mathbf{x}_f(t)$: **evoluzione forzata**
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t)$	allora	$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t)$	

in particolare,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{F}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{G}\mathbf{u}(\tau) \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\mathbf{F}\tau}\dot{\mathbf{x}}(\tau) = e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{F}\mathbf{x}(\tau) + e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau) \\
&\Leftrightarrow \quad e^{-\mathbf{F}\tau}\dot{\mathbf{x}}(\tau) - e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{F}\mathbf{x}(\tau) = e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\left(e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}(\tau)\right) = e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}(\tau)\right)d\tau = \int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{x}(t) - e^{-\mathbf{F}0}\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&\Leftrightarrow \quad e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&\Leftrightarrow \quad e^{\mathbf{F}t}e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{F}t}\int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

da cui si conclude che

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{H}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{H}e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) \\
&= \mathbf{H}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \left(\mathbf{H}e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G} + \mathbf{J}\delta(t-\tau)\right)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t)
\end{aligned}$$

dove $\delta(\cdot)$ rappresenta la *delta di Dirac* per cui si ha che

$$\mathbf{y}_f(t) = (\mathbf{w} * \mathbf{u})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \text{con} \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{H}e^{\mathbf{F}(t)}\mathbf{G} + \mathbf{J}\delta(t) \quad \text{risposta impulsiva del sistema}$$

2.1.2 Evoluzione nel dominio della frequenza

Si consideri la *trasformata di Laplace* $\left(V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t\right)$ di un sistema LTI multidimensionale si ha che

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] = \mathbf{F}\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{G}\mathcal{L}[\mathbf{u}(t)] \\ \mathcal{L}[\mathbf{y}(t)] = \mathbf{H}\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{J}\mathcal{L}[\mathbf{u}(t)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}\mathbf{X}(s) + \mathbf{J}\mathbf{U}(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{G}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}\mathbf{X}(s) + \mathbf{J}\mathbf{U}(s) \end{cases}$$

da cui

$$\boxed{\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{U}(s) = \mathbf{X}_l(s) + \mathbf{X}_f(s)}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{U}(s) + \mathbf{J}\mathbf{U}(s) \\ &= \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 + (\mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J})\mathbf{U}(s) \\ &= \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{W}(s)\mathbf{U}(s) = \mathbf{Y}_l(s) + \mathbf{Y}_f(s) \end{aligned}$$

DOMINIO DEL TEMPO vs. DOMINIO DELLA FREQUENZA

1. $\mathbf{W}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J}$: *matrice di trasferimento*, corrispondente alla trasformata di Laplace della risposta impulsiva
2. $\mathcal{L}[e^{\mathbf{F}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$: metodo alternativo per calcolare $e^{\mathbf{F}t}$

Dato il sistema

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

sia $\mathbf{z} \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ dove $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base
allora è possibile riscrivere le equazioni dei sistema nella nuova base

$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

ovvero

$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}'\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}'\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}'\mathbf{z}(t) + \mathbf{J}'\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\mathbf{F}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}, \mathbf{G}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} \\ &\mathbf{H}' = \mathbf{H}\mathbf{T}, \mathbf{J}' = \mathbf{J} \end{aligned}$$

Si verifica che

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'(s) &= \mathbf{H}'(s\mathbf{I} - \mathbf{F}')^{-1}\mathbf{G}' + \mathbf{J}' = \mathbf{H}\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J} = \mathbf{H}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J} = \mathbf{W}(s) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ i sistemi Σ e Σ' sono algebricamente equivalenti in quanto hanno la stessa matrice di trasferimento, ovvero lo stesso comportamento I/O

Si osserva che

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}+\mathbf{J} = \mathbf{H}\frac{\text{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{F})}\mathbf{G}+\mathbf{J} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \cdots & W_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{p1}(s) & \cdots & W_{pm}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

con $W_{ij}(s) = \dfrac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)}$: funzioni razionali proprie (ovvero tali che $\deg D_{ij}(s) \geq \deg N_{ij}(s)$)
di conseguenza, $p \in \mathbb{C}$ è un polo di $\mathbf{W}(s)$ se $p \in \mathbb{C}$ è un polo di almeno un $W_{ij}(s)$

$$\boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{F})} \implies \{\text{poli } \mathbf{W}(s)\} \subseteq \{\text{autovalori } \mathbf{F}\}}$$

2.2 Dinamica dei sistemi a tempo discreto

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{p\times m} \end{array}$$

2.2.1 Evoluzione nel dominio del tempo

Nel caso di un sistema **autonomo** scalare $(x(t) \in \mathbb{R}, u(t) = 0)$

$$x(t+1) = fx(t),\ x(0) = x_0 \qquad \text{allora} \qquad x(t) = f^t x_0$$

$\rightarrow$ risoluzione dell'equazione alle differenze

Analogamente, nel caso di un sistema **autonomo** ma multidimensionale $(\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) = \mathbf{0})$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad \text{allora} \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}_0$$

Come calcolare $\mathbf{F}^t$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

- diagonalizzazione di $\mathbf{F}$
  - trovare una matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \mathbf{F}_J$

$$\mathbf{F}^t = \mathbf{T}\mathbf{F}_J^t\mathbf{T}^{-1}$$

Si noti che

1. $$\mathbf{F}_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{J}_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J}_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{\lambda_k} \end{array}\right] \implies \mathbf{F}_J^t = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{J}_{\lambda_1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J}_{\lambda_2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{\lambda_k}^t \end{array}\right]$$

$$\textbf{2. } \mathbf{J}_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{J}_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J}_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{\lambda_i,m_i^g} \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J}^t_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{J}^t_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J}^t_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}^t_{\lambda_i,m_i^g} \end{array}\right]$$

$$\textbf{3(i). } \mathbf{J}_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \xRightarrow{\lambda_i \neq 0} \quad \mathbf{J}^t_{\lambda_i,j} = (\lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{N})^t, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{J}^t_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} & \cdots & \binom{t}{m_{ij}^r-1}\lambda_i^{t-m_{ij}^r+1} \\ 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t \end{bmatrix}$$

siano $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

allora $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \mathbf{A}^{t-k}\mathbf{B}^k = \sum_{k=0}^{t} \frac{t!}{(t-k)!k!}\mathbf{A}^{t-k}\mathbf{B}^k$ (binomio di Newton)

$\rightarrow \mathbf{J}^t_{\lambda_i,j} = (\lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{N})^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (\lambda_i \mathbf{I})^{t-k}\mathbf{N}^k$

$$= (t \geq m_{ij}^r) = \binom{t}{0}\lambda_i^t + \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1}\mathbf{N} + \binom{t}{2}\lambda_i^{t-1}\mathbf{N}^2 + \ldots + \binom{t}{m_{ij}^r}\lambda_i^{t-(m_{ij}^r-1)}\mathbf{N}^{m_{ij}^r-1}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{N}^{m_{ij}^r-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}^k = \mathbf{0}$$

$$\textbf{3(ii). } \mathbf{J}_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \xRightarrow{\lambda_i = 0} \quad \mathbf{J}^t_{\lambda_i,j} = \mathbf{N}^t, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{J}^t_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \delta(t) & \delta(t-1) & \delta(t-2) & \cdots & \delta(t-m_{ij}^r+1) \\ 0 & \delta(t) & \delta(t-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta(t) \end{bmatrix}$$

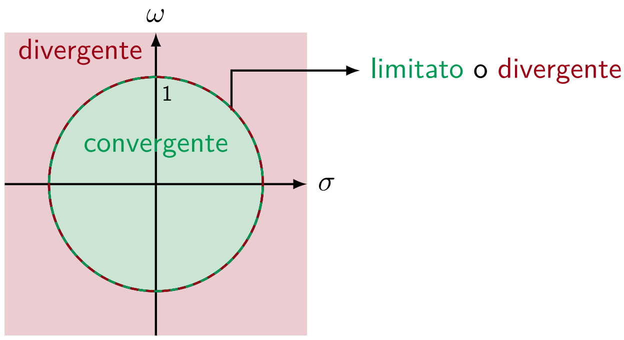
$\binom{t}{0}\lambda_i^t, \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1}, \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2}, \ldots, \binom{t}{m_{ij}^r-1}\lambda_i^{t-m_{ij}^r+1}$ **modi elementari** del sistema

$\delta(t), \delta(t-1), \delta(t-2), \ldots, \delta(t-m_{ij}^r+1)$

si verifica che

1. se $\lambda_i \neq 0$ allora $\binom{t}{k}\lambda_i^{t-k} \sim t^k \lambda_i^t = t^k e^{t(\ln \lambda_i)}$ dove $\ln(\cdot)$ indica il logaritmo naturale complesso
2. se $\lambda_i = 0$ allora i modi elementari si annullano dopo un numero finito di passi
   (e non esiste la controparte modale a tempo continuo)
3. se $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{F}$ allora
   - nel caso $\lambda_i \neq 0$ il modo corrispondente è $\binom{t}{k_i}\lambda_i^{t-k_i} \sim t^{k_i}\lambda_i^t = t^{k_i} e^{t(\ln \lambda_i)} = t^{k_i} e^{t(\ln|\lambda_i| + i \arg(\lambda_i))}$
   - nel caso $\lambda_i = 0$ il modo corrispondente è $\delta(t - k_i)$

   in particolare (*carattere dei modi*)



Dato il sistema LTI **autonomo** multidimensionale $(\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) = \mathbf{0})$

$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$	allora	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_l(t)$: **evoluzione libera**
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$	allora	$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{H}\mathbf{F}^t\mathbf{x}_0$ $=$ combinazione lineare di vettori dei modi elementari	

in particolare, sia $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$, allora (*comportamento asintotico del sistema*)

$\lvert\lambda_i\rvert < 1, \forall i$	$\iff$	$\mathbf{F}^t \xrightarrow{t\to\infty} 0$ $\mathbf{F}^t = \mathbf{0}$ per t finito se $\lambda_i = 0$	$\implies \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{F}^t\mathbf{x}_0 \xrightarrow{t\to\infty} \mathbf{0}$
$\lvert\lambda_i\rvert \leq 1,\ \forall i$ e $m_i^a = m_i^g$ se $\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\iff$	$\mathbf{F}^t$ limitata	$\implies$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{F}^t\mathbf{x}_0$ limitata
$\exists\, \lambda_i$ tale che $\lvert\lambda_i\rvert > 1$ o $\lvert\lambda_i\rvert = 1$ e $m_i^a > m_i^g$	$\iff$	$\mathbf{F}^t$ non limitata	$\implies$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{F}^t\mathbf{x}_0$? dipendente da $\mathbf{H}, \mathbf{x}_0$

Dato il sistema LTI **NON autonomo** multidimensionale $(\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0})$

$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$	allora	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)$	$\mathbf{x}_f(t)$: **evoluzione forzata**
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t)$	allora	$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t)$	

in particolare,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{u}(0)\\
&\mathbf{x}(2) = \mathbf{F}\mathbf{x}(1) + \mathbf{G}\mathbf{u}(1) = \mathbf{F}(\mathbf{F}\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{u}(0)) + \mathbf{G}\mathbf{u}(1) = \mathbf{F}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}\mathbf{u}(1)\\
&\mathbf{x}(3) = \mathbf{F}\mathbf{x}(2) + \mathbf{G}\mathbf{u}(2) = \mathbf{F}(\mathbf{F}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}\mathbf{u}(1)) + \mathbf{G}\mathbf{u}(2) = \mathbf{F}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{F}^2\mathbf{G}\mathbf{u}(0) + \mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{u}(1) + \mathbf{G}\mathbf{u}(2)\\
&\quad\vdots\\
&\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{t-1}\mathbf{F}^{t-1-k}\mathbf{G}\mathbf{u}(k) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}(0) + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \mathbf{F}^2\mathbf{G} & \dots & \mathbf{F}^{t-1}\mathbf{G}\end{bmatrix}}_{\substack{\mathcal{R}_t \in \mathbb{R}^{n\times mt}\\ \text{matrice di raggiungibilità in } t \text{ passi}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t-1)\\ \mathbf{u}(u-2)\\ \vdots\\ \mathbf{u}(0)\end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^{mt}}
\end{aligned}$$

da cui si conclude che

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}^t\mathbf{x}(0) + \mathcal{R}_t\mathbf{u}_t = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{F}^t\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{t-1}\mathbf{H}\mathbf{F}^{t-1-k}\mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t)\\
&= \mathbf{H}\mathbf{F}^t\mathbf{x}(0) + (\mathbf{H}\mathcal{R}_t\mathbf{u}_t + \mathbf{J}\mathbf{u}(t)) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_f(t) &= (\mathbf{w} * \mathbf{u})(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{w}(t-k)\mathbf{u}(k)\\
&= (\mathbf{u}(k) = \mathbf{w}(k) = \mathbf{0}, k < 0) = \sum_{0}^{t}\mathbf{w}(t-k)\mathbf{u}(k)
\end{aligned}$$

con $\mathbf{w}(t) = \begin{cases}\mathbf{J} & t = 0\\ \mathbf{H}\mathbf{F}^{t-1}\mathbf{G} & t > 0\end{cases}$ risposta impulsiva del sistema

2.2.2 Evoluzione nel dominio della frequenza

Si consideri la *trasformata Zeta* $\left(V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{0}^{\infty} v(t)z^{-t}\right)$ di un sistema LTI multidimensionale si ha che

$$\begin{cases}\mathcal{Z}[\mathbf{x}(t+1)] = \mathbf{F}\mathcal{Z}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{G}\mathcal{Z}[\mathbf{u}(t)]\\ \mathcal{Z}[\mathbf{y}(t)] = \mathbf{H}\mathcal{Z}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{J}\mathcal{Z}[\mathbf{u}(t)]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}\mathbf{X}(z) + \mathbf{G}\mathbf{U}(z)\\ \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}\mathbf{X}(z) + \mathbf{J}\mathbf{U}(z)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}_0 + \mathbf{G}\mathbf{U}(s)\\ \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}\mathbf{X}(z) + \mathbf{J}\mathbf{U}(z)\end{cases}$$

da cui

$$\boxed{\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}z\mathbf{x}_0 + (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{U}(z) = \mathbf{X}_l(z) + \mathbf{X}_f(z)}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}(z) &= \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}z\mathbf{x}_0 + \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{U}(z) + \mathbf{J}\mathbf{U}(z)\\
&= \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}z\mathbf{x}_0 + (\mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J})\mathbf{U}(z)\\
&= \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}z\mathbf{x}_0 + \mathbf{W}(z)\mathbf{U}(z) = \mathbf{Y}_l(z) + \mathbf{Y}_f(z)
\end{aligned}$$

DOMINIO DEL TEMPO vs. DOMINIO DELLA FREQUENZA

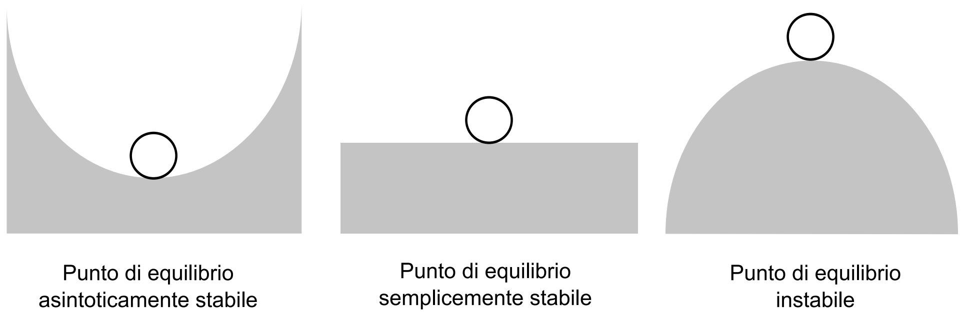
1. $\mathbf{W}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{J}$: *matrice di trasferimento*, corrispondente alla trasformata Zeta della risposta impulsiva
2. $\mathcal{Z}[\mathbf{F}^t] = z(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$: metodo alternativo per calcolare $\mathbf{F}^t$

2.3 Analisi della stabilità

stabilità: proprietà legata al concetto di ritornare o rimanere in una certo stato entro certi limiti o condizioni desiderate nel tempo, nonostante le perturbazioni o le variazioni interne o esterne

In generale, si distingue tra

- *stabilità di un punto (di equilibrio)*: proprietà che indica come il sistema risponde alle perturbazioni intorno a quel punto stesso in cui le sue variabili di stato rimangono costanti nel tempo, cioè dove le equazioni del sistema sono soddisfatte senza alcuna variazione nel tempo,
- *stabilità di un sistema*: proprietà che dipende dall'insieme di tutti i punti di equilibrio di un sistema e dalla loro interazione dinamica $\rightarrow$ la stabilità di un sistema può coinvolgere non solo la stabilità dei suoi punti di equilibrio, ma anche la stabilità delle traiettorie che il sistema può seguire nel suo spazio di stato.



2.3.1 Stabilità dei sistemi lineari

stabilità

- **asintotica**: un sistema lineare è asintoticamente stabile se, partendo da una condizione iniziale arbitraria, nel limite temporale infinito, le sue soluzioni si avvicinano progressivamente allo stato di equilibrio
- **semplice**: un sistema lineare è semplicemente (o strettamente) stabile se, partendo da una condizione iniziale arbitraria, le sue soluzioni possono avvicinarsi all'equilibrio nel tempo senza oscillazioni significative, ma potrebbero non convergere all'equilibrio nel limite temporale infinito
- **BIBO (Bounded-Input Bounded-Output)**: un sistema lineare è BIBO-stabile se, quando l'ingresso è limitato in ampiezza (bounded), l'uscita rimane limitata in ampiezza, indipendentemente dallo stato iniziale del sistema.

- **sistemi a tempo continuo**

  sia $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

  – se $\Re[\lambda_i] < 0, \forall i$ allora il sistema è asintoticamente stabile
  – se $\Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i$ e $m_i^a = m_i^g$ se $\Re[\lambda_i] = 0$ allora il sistema è semplicemente stabile
  – $\exists\,\lambda_i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$ o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $m_i^a > m_i^g$ allora il sistema è instabile

- **sistemi a tempo discreto**

  sia $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

  – se $|\lambda_i| < 1, \forall i$ allora il sistema è asintoticamente stabile
  – se $|\lambda_i| \leq 1,\ \forall i$ e $m_i^a = m_i^g$ se $|\lambda_i| = 1$ allora il sistema è semplicemente stabile
  – $\exists\,\lambda_i$ tale che $|\lambda_i| > 1$ o $|\lambda_i| = 1$ e $m_i^a > m_i^g$ allora il sistema è instabile

- **sistemi a tempo continuo o discreto**

  sia

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

allora il sistema si dice BIBO stabile se per ogni vettore d'ingresso $\mathbf{u}(t)$ con componenti limitate in t la corrispondente uscita forzata $\mathbf{y}_f(t) = \int_0^t \left(\mathbf{H}e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G} + \mathbf{J}\delta(t-\tau)\right)\mathbf{u}(\tau)d\tau / \mathbf{y}_f(t) = \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{H}\mathbf{F}^{t-1-k}\mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t)$ ha componenti limitate in t.

Proposizione Siano $\{p_i\}_{i=1}^r$ i poli della matrice di trasferimento del sistema ridotta ai minimi termini, *cioè dopo tutte le possibili cancellazioni zero-polo dei suoi elementi*. Il sistema è BIBO stabile se e solo se $\Re[p_i] < 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$.

dal momento che i poli della matrice sono un sottoinsieme proprio degli autovalori di $\mathbf{F}$, si ha che

$$\boxed{\text{stabilità asintotica} \quad \Longrightarrow \quad \text{BIBO stabilità}}$$

2.3.2 Stabilità dei sistemi non lineari

- **sistemi a tempo continuo**

Teorema Sia $\dot{\boldsymbol{\delta}}_x(t) = \mathbf{F}\boldsymbol{\delta}_x(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ attorno al punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di $\mathbf{F}$. Allora

1. se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0$, $\forall i$), allora $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare
2. se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$), allora $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

▶ *caso critico*: $\Re[\lambda_i] \leq 0$, $\forall i$, e $\exists\, i$: $\Re[\lambda_i] = 0$

esempio

1. $\dot{x} = \sin x$

$$\begin{aligned} \bar{x} = 0 : &\quad \dot{\delta}_x = \cos(\bar{x})\delta_x \ \rightarrow\ \dot{\delta}_x = \delta_x \qquad \lambda = 1 \quad \Longrightarrow\ \bar{x} = 0 \text{ instabile} \\ \bar{x} = \pi : &\quad \dot{\delta}_x = \cos(\bar{x})\delta_x \ \rightarrow\ \dot{\delta}_x = -\delta_x \qquad \lambda = -1 \quad \Longrightarrow\ \bar{x} = \pi \text{ stabile} \end{aligned}$$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2) = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2+x_2^2) \end{cases}$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}: \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} = \begin{bmatrix} 1-3x_1^2-x_2^2 & -1-2x_1x_2 \\ 1-2x_1x_2 & 1-x_1^2-3x_2^2 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{\mathbf{F}}(\lambda) = det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F}) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$\Re[\lambda_{1,2}] > 0 \implies \bar{\mathbf{x}}$ instabile

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
$\bar{x} = 0: \quad \dot{\delta}_x = 3\alpha\bar{x}^2\delta_x \ \rightarrow \ \dot{\delta}_x = 0 \ \lambda = 0 \quad \implies ?$ caso critico

☒

- **sistemi a tempo discreto**

Teorema Sia $\boldsymbol{\delta}_x(t+1) = \mathbf{F}\boldsymbol{\delta}_x(t)$ il sistema linearizzato di $\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t))$ attorno al punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di $\mathbf{F}$. Allora

1. se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($|\lambda_i| < 1$, $\forall i$), allora $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare
2. se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$ tale che $|\lambda_i| > 1$), allora $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

▶ *caso critico*: $|\lambda_i| \leq 1$, $\forall i$, e $\exists\, i$: $|\lambda_i| = 1$