# A RICHIAMI E APPROFONDIMENTI DI ALGEBRA LINEARE

## A.1 Spazi vettoriali e trasformazioni lineari

- **vettori e basi in $\mathbb{R}^n$**

1. L'insieme (di vettori) $\mathbb{R}^n$ con campo (di scalari) $\mathbb{R}$ dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno *spazio vettoriale*.

2. I vettori $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sono

   linearmente *indipendenti* se $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},\ \alpha_i \in \mathbb{R} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$
   linearmente *dipendenti* se $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},\ \alpha_i \in \mathbb{R} \not\Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

   **esempio**

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3 \text{ linearmente indipendenti?}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \implies \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3 \text{ linearmente indipendenti}$$

   ⊠

3. I vettori $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ formano una *base* $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ se:

   $(i)$ generano $\mathcal{V}$: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},\ \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k$ ($\text{span}\{\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k\} = \mathcal{V}$)
   $(ii)$ sono linearmente indipendenti

   **esempio**

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{base di } \mathcal{V} = \text{span}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}\ ?$$

$$\mathcal{B} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{(\textbf{N.B.} scelta generatori della base non unica!)}$$

   ⊠

- **trasformazioni lineari**

1. Una trasformazione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice lineare se

   $(i)$ $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2), \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$
   $(ii)$ $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2. Una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è univocamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$.

3. Fissata una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^n$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^m$ è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con una matrice $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ che descrive come le coordinate (rispetto a $\mathcal{B}_1$) di vettori di $\mathbb{R}^n$ vengono mappate da $f$ in coordinate di vettori (rispetto a $\mathcal{B}_2$) di $\mathbb{R}^m$.

4. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ad una "nuova" base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta $f$ nella nuova base è $\mathbf{F}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$.

## A.2 Principali proprietà e operazioni matriciali

- **autovalori e autovettori di una matrice**

  1. Sia $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ allora
     - nucleo di $\mathbf{F}$: $\ker \mathbf{F} \triangleq \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$
     - immagine di $\mathbf{F}$: $\text{Im}\, \mathbf{F} \triangleq \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \,:\, \mathbf{w} = \mathbf{F}\mathbf{v}, \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$
     - rango di $\mathbf{F}$: $\text{rank}\, \mathbf{F} \triangleq \#$ righe (o colonne) lin. indipendenti di $\mathbf{F} = \dim \text{Im}\, \mathbf{F}$

     **esempio**

     $$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \ker \mathbf{F}?\ \text{Im}\, \mathbf{F}?\ \text{rank}\ \mathbf{F}?$$

     $$\ker\ \mathbf{F} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix}\right\}, \quad \text{Im}\ \mathbf{F} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}, \quad \text{rank}\ \mathbf{F} = 2$$

     ⊠

  2. Sia $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{F}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto *autovettore* di $\mathbf{F}$ corrispondente all'*autovalore* $\lambda$.
  3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$di $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono le radici del *polinomio caratteristico* $\Delta_{\mathbf{F}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F}) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1^a}(\lambda-\lambda_2)^{m_2^a}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k^a}$, dove $m_i^a$ è la *molteplicità algebrica* dell'autovalore $\lambda_i$.
  4. Ogni autovettore $\mathbf{v}_i$ relativo all'autovalore $\lambda_i$ di $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soddisfa $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{v}_I = \mathbf{0}$.
  5. La *molteplicità geometrica* $m_i^g$ dell'autovalore $\lambda_i$ di $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente indipendenti associati a $\lambda_i$ e coincide con $m_i^g = \dim\ker(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{F}) = n-\text{rank}(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{F}), (1 \leq m_i^g \leq m_i^a)$.
  6. Se $m_i^a = m_i^g$ per ogni autovalore $\lambda_i$ di $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ allora $\mathbf{F}$ è *diagonalizzabile*, cioè, esiste una matrice di cambio di base $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $\mathbf{F}_D \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$ è diagonale.

     **esempio**

     **1.** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = i,\ m_1^a = 1,\ m_1^g = 1,\ \lambda_2 = -i,\ m_2^a = 1,\ m_2^g = 1 \quad \Longrightarrow$ diagonalizzabile

     **2.** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1,\ m_1^a = 2,\ m_1^g = 2 \quad \Longrightarrow$ diagonalizzabile

     **3.** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2,\ m_1^a = 1,\ m_1^g = 1,\ \lambda_2 = 0,\ m_2^a = 1,\ m_2^g = 1 \quad \Longrightarrow$ diagonalizzabile

     **4.** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1,\ m_1^a = 2,\ m_1^g = 1 \quad \Longrightarrow$ **NON** diagonalizzabile

     ⊠

- **inversa e determinante di una matrice**

  1. Sia $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
     - per ogni $i = 1\ldots n$ (indice riga), si ha $\det(\mathbf{F}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} F_{ij} \det(\mathbf{F}_{ij}^-)$
     - per ogni $j = 1\ldots n$ (indice colonna), si ha $\det(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} F_{ij} \det(\mathbf{F}_{ij}^-)$

     dove $\mathbf{F}_{ij}^j \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ è la matrice ottenuta cancellando la $i$-esima riga e la $j$-esima colonna di $\mathbf{F}$ e $F_{ij} \in \mathbb{R}$ è l'elemento nella matrice $\mathbf{F}$ posto nella $i$-esima riga e $j$-esima colonna.

2. Una matrice $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è detta *invertibile* se esiste una matrice $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $\mathbf{FH} = \mathbf{HF} = \mathbf{I}$. $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{H}$ è detta *inversa* di $\mathbf{F}$.

   $\mathbf{F}$ è invertibile se e solo se $\det(\mathbf{F}) \neq 0$. In tal caso, la matrice inversa $\mathbf{F}^{-1}$ si può calcolare come $\mathbf{F}^{-1} = \dfrac{\mathsf{adj}(\mathbf{F})}{\det(\mathbf{F})}$, dove $\mathsf{adj}(\mathbf{F})$ è la matrice aggiunta di $\mathbf{F}$, $[\mathsf{adj}(\mathbf{F})]_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{F}_{\overline{ji}})$.

**esempio**

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(\mathbf{F})?\ \mathbf{F}^{-1}?$$

$$\det(\mathbf{F}) = 2 \implies \mathbf{F} \text{ invertibile}, \qquad \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⊠

- **matrici triangolari e triangolari a blocchi**

1. Una matrice $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice

   – *triangolare superiore* se $\quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{bmatrix}$

   – *triangolare inferiore* se $\quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix}$

   Gli autovalori di una matrice triangolare $\mathbf{F}$ sono gli elementi sulla diagonale.
   L'inversa di una matrice triangolare $\mathbf{F}$ (quando esiste) è ancora triangolare e i suoi elementi sulla diagonale soddisfano $[\mathbf{F}^{-1}]_{ii} = 1/F_{ii}$.

2. Una matrice $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice

   – *triangolare superiore a blocchi* se $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & \star & \cdots & \star \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \star \end{array}\right]$

   – *triangolare inferiore a blocchi* se $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & \star & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \star & \cdots & \star & \star \end{array}\right]$

   dove gli "$\star$" sulla diagonale sono matrici quadrate di dimensioni anche diverse tra loro.
   Gli autovalori di una matrice triangolare a blocchi $\mathbf{F}$ sono l'unione degli autovalori dei blocchi sulla diagonale.
   L'inversa di una matrice triangolare $\mathbf{F}$ a blocchi (quando esiste) è ancora triangolare a blocchi con blocchi diagonali di $\mathbf{F}^{-1}$ pari alle inverse dei blocchi diagonali di $\mathbf{F}$.

- **matrici in forma canonica di Jordan**

  sia $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$, $m_i^a$: molteplicità algebrica $\lambda_i$ e $m_i^g$: molteplicità geometrica $\lambda_i$ allora

  - caso 1: $m_i^a = m_i^g$ per ogni $i \implies \mathbf{F}$ diagonalizzabile
  - caso 2: esiste $i$ tale che $m_i^a > m_i^g \implies \mathbf{F}$ **non** diagonalizzabile
    $\to$ trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (*forma di Jordan*)

**Teorema** Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ gli autovalori di $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Esiste una $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$\mathbf{F}_J \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{J}_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J}_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{\lambda_k} \end{array}\right], \quad \mathbf{J}_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{J}_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J}_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{\lambda_i,m_i^g} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m_i^a \times m_i^a}$$

dove

$$\mathbf{J}_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_{ij}^r \times m_{ij}^r}, \quad m_i^a = \sum_{j=1}^{m_i^g} m_{ij}^r$$

$\mathbf{F_J}$ (*forma canonica di Jordan di* $\mathbf{F}$) è unica a meno di permutazioni di blocchi $\{\mathbf{J}_{\lambda_i}\}$ e miniblocchi $\{\mathbf{J}_{\lambda_i,j}\}$.

1. Esiste una procedura algoritmica per il calcolo della matrice di trasformazione $\mathbf{T}$.
2. La dimensione del blocco $\mathbf{J}_{\lambda_i}$ associato a $\lambda_i$ è pari alla molteplicità algebrica $m_i^a$.
3. Il numero di miniblocchi $\{\mathbf{J}_{\lambda_i,j}\}$ associati a $\lambda_i$ è pari alla molteplicità geometrica $m_i^g$.
4. In generale, per determinare $\mathbf{F}_J$ non è sufficiente conoscere gli autovalori $\{\lambda_i\}$ e i valori di $\{m_i^a\}$, $\{m_i^g\}$, ma bisogna anche conoscere i valori di $\{m_{ij}^r\}$!
5. Se $m_i^a \leq 3\ \forall i$, è possibile calcolare $\mathbf{F}_J$ conoscendo solo $\{\lambda_i\}$, $\{m_i^a\}$, $\{m_i^g\}$!

**esempio**

**1.** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 2,\ m_1^a = 3,\ m_1^g = 1 \implies \mathbf{F}_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**2.** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \alpha = 0, 1 \quad \lambda_1 = 1,\ m_1^a = 4,\ m_1^g = 2 \implies \mathbf{F}_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 1 \end{cases}$

$\boxtimes$

- **esponenziale di matrice**

  Sia $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, allora

$$\boxed{e^{\mathbf{F}} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{\mathbf{F}^k}{k!}}$$

con

1. $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
2. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \implies e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$
3. $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile: $e^{\mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{T}^{-1}} = \mathbf{T} e^{\mathbf{F}} \mathbf{T}^{-1}$
4. $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} e^{\mathbf{F}t} = \mathbf{F} e^{\mathbf{F}t} = e^{\mathbf{F}t} \mathbf{F}$, $\;t \in \mathbb{R}$