Lez. 01 : riassunto

Sistema = modello matematico
dinamico

- rappresentazione esterna o ingresso/uscita

$$u \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y$$

  - dominio del tempo : equazioni differenziali
    alle differenze
  - dominio della frequenza: FdT ~ trasformate Laplace
    Zeta

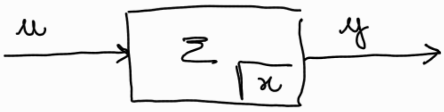
- rappresentazione interna o di stato

$$u \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; \boxed{x}} \longrightarrow y$$

  - dominio del tempo : sistema di equazioni
    :) mappa di transizione dello stato
    :) mappa di uscita

Σ LTI : $\Sigma = (F, G, H, J)$ $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ $J \in \mathbb{R}^{p \times m}$

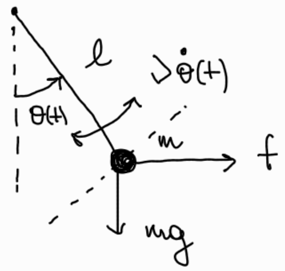
RAPPRESENTAZIONE di SISTEMI NON LINEARI



$x = [x_1 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ stato
$u = [u_1 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ ingresso
$y = [y_1 \dots y_p]^T \in \mathbb{R}^p$ uscite

esempi

① pendolo semplice con attrito



$f(t)$: input
$\theta(t)$: output

$$J\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \cdot l + f\cos\theta \cdot l - \nu\dot{\theta}$$
$$\overset{!}{=} ml^2 \cdot \ddot{\theta}$$

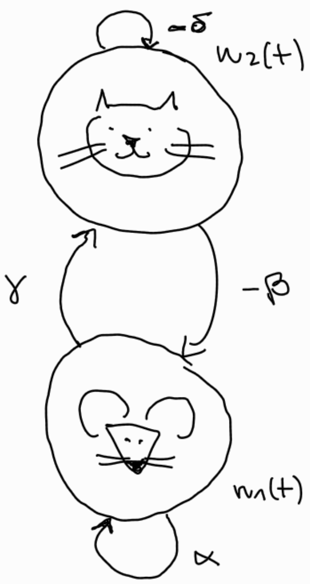
rappresentazione esterna : $ml^2\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + mg\sin\theta \cdot l - f\cos\theta \cdot l = 0$

rappresentazione interna : $x_1 = \theta \qquad u = f$
$x_2 = \dot{\theta} \qquad y = \theta$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2}\left(-mg\sin\theta \cdot l + f\cos\theta \cdot l - \nu\dot{\theta}\right)$$
$$= -\frac{g}{l}\sin\theta + \frac{1}{ml} \cdot f \cdot \cos\theta - \frac{\nu}{ml^2}\dot{\theta}$$
$$= -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml}\cos x_1 \cdot u - \frac{\nu}{ml^2}x_2$$

$$y = x_1$$

② prede - predatori



$n_1(t)$: # prede al tempo t
$n_2(t)$: # predatori al tempo t

ipotesi

1) in assenza di predatori ($n_2 = 0$) le prede crescono esponenzialmente con un tasso di crescita $\alpha > 0$

2) in assenza di prede ($n_1 = 0$) i predatori decrescono esponenzialmente con un tasso di decrescita $\delta > 0$

3) quando sono presenti entrambe le popolazioni la frequenza degli incontri è proporzionale al prodotto $n_1 \cdot n_2$.

gli incontri inducono una diminuzione delle prede con tasso $\beta > 0$ e un aumento dei predatori con tasso $\gamma > 0$

- rappresentazione interna : $x_1(t) = w_1(t)$

$x_2(t) = w_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha\, x_1(t) - \beta\, x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\delta\, x_2(t) + \gamma\, x_1(t) x_2(t) \end{cases}$$

LINEARIZZAZIONE di SISTEMI DINAMICI

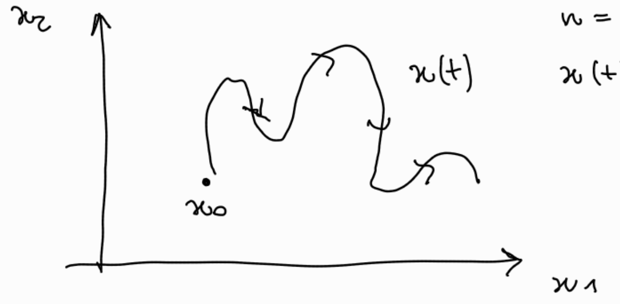
↳ approssimazione di un sistema non lineare con un sistema lineare in una determinate condizione operative

Σ LTI scalare autonomo ($u = 0$)

$\dot{x}(t) = f\, x(t)$ $\quad t \in \mathbb{R}^+$ $\quad$ allora $\quad x(t) = e^{ft} x_0$

$x(t+1) = f\, x(t)$ $\quad t \in \mathbb{Z}^+$ $\quad$ allora $\quad x(t) = f^t x_0$

▷ traiettoria di stato relative a una certe condizione iniziale x_0 = insieme $\{ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,\ x(0) = x_0 \}$



$n = 2$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

▷ ritratto di fase : insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

PUNTI di EQUILIBRIO

- sistemi autonomi ($u = 0$)

punto di equilibrio : $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ per il sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$

$x(t+1) = f(x(t))$

se l'evoluzione dello stato corrispondente allo stato iniziale $x_0 = \bar{x}$ è costante $\forall t \geq 0$

$$\{ x(t) = \bar{x},\ \forall t \geq 0 \text{ con } x(0) = \bar{x} \}$$

dato il sistema TI

t.c. $\dot{x}(t) = f(x(t))$: $\bar{x}$ eq. $\leftrightarrow$ $f(\bar{x}) = 0$

t.d. $x(t+1) = f(x(t))$: $\bar{x}$ eq. $\leftrightarrow$ $\bar{x} = f(\bar{x})$

dato il sistema LTI

t.c. $\dot{x}(t) = F x(t)$: $\bar{x}$ eq. $\leftrightarrow$ $F\bar{x} = 0$ $\leftrightarrow$ $\bar{x} \in \ker F$

t.d. $x(t+1) = Fx(t)$: $\bar{x}$ eq. $\leftrightarrow$ $\bar{x} = F\bar{x}$ $\leftrightarrow$ $\bar{x} \in \ker(F-I)$

$$\left(\ker F = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Fx = 0 \}\right)$$

esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \longrightarrow x(1-x) = 0 \longrightarrow$ 2 equilibri : $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \longrightarrow x^2 + 1 = 0 \longrightarrow$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$ un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

☒

- sistemi con ingresso costante ($u = \bar{u}$)

punto di equilibrio : $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ per il sistema $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, $x(t+1) = f(x(t), u(t))$

se l'evoluzione dello stato corrispondente allo stato iniziale $x_0 = \bar{x}$ e all'ingresso $u = \bar{u}$ è una costante

$$\{ x(t) = \bar{x}, \ \forall t \geq 0 \text{ con } x(0) = \bar{x}, \ u(t) = \bar{u} \}$$

dato il sistema TI

t.c. $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$: $\bar{x}$ eq $\longleftrightarrow$ $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

t.d. $x(t+1) = f(x(t), u(t))$: $\bar{x}$ eq $\longleftrightarrow$ $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$

dato il sistema LTI

t.c. $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$: $\bar{x}$ eq $\longleftrightarrow$ $F\bar{x} + G\bar{u} = 0$ $\longleftrightarrow$ $F\bar{x} = -G\bar{u}$

t.d. $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$: $\bar{x}$ eq $\longleftrightarrow$ $\bar{x} = F\bar{x} + G\bar{u}$ $\longleftrightarrow$ $(F-I)\bar{x} = -G\bar{u}$

esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}$ $\quad \bar{u} \neq 0$ $\longrightarrow$ $\cancel{u = 0}$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$ $\quad \bar{u} \neq 0$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$

$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x_2 = -\bar{u} \end{cases}$ inf. equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_1^2 + \bar{u} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1^2 - x_1 + \bar{u} = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $x_1 = \dfrac{+1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2}$

se $1 - 4\bar{u} < 0$ cioè $\bar{u} > 1/4$ allora nessun equilibrio

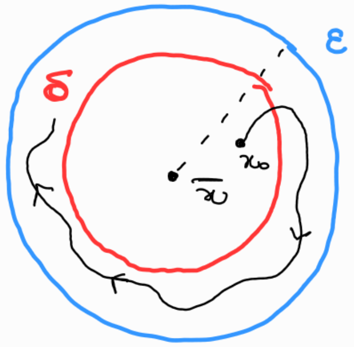
se $1 - 4\bar{u} = 0$ cioè $\bar{u} = 1/4$ allora un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

se $1 - 4\bar{u} > 0$ cioè $\bar{u} < 1/4$ allora due equilibri $\bar{x} = +\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

STABILITÀ SEMPLICE e ASINTOTICA

punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

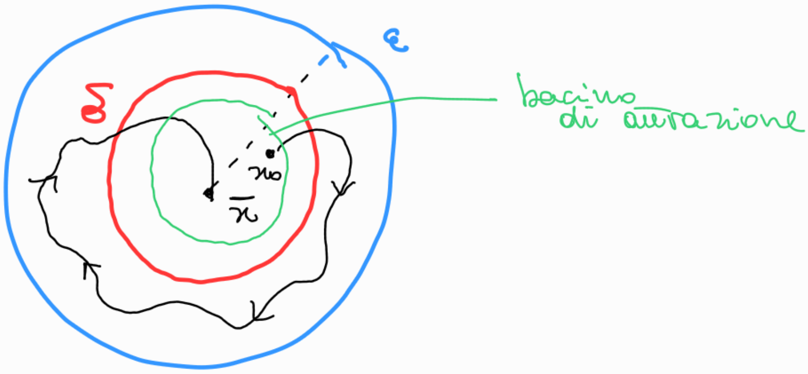
- semplicemente stabile se
  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\| x_0 - \bar{x} \| \leq \delta \longrightarrow \| x(t) - \bar{x} \| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$



- asintoticamente stabile se

  1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\| x_0 - \bar{x} \| \leq \delta \longrightarrow \| x(t) - \bar{x} \| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

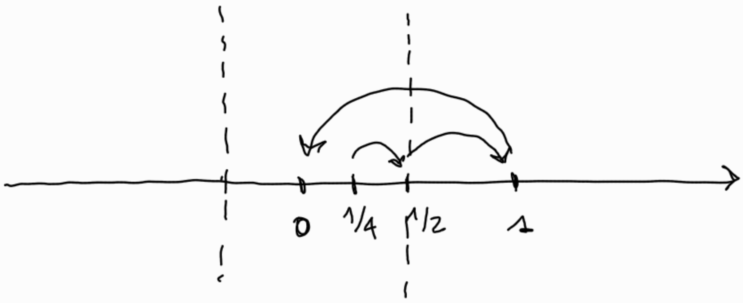
  2) $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \bar{x} \quad \forall \ x_0 \in \mathbb{R}^n$ sufficientemente vicino a $\bar{x}$



esempio

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & |x(t)| < 1 \\ 0 & |x(t)| > 1 \end{cases} \qquad x(t) \in \mathbb{R}$$

$\bar{x} = 0$ equilibrio attrattivo



$x(0) = 1/4$
$x(1) = 1/2$
$x(2) = 1$
$x(3) = 0$

: $\bar{x}$ è attrattivo

ma

$\varepsilon = 1/2 \qquad \nexists \ \delta > 0$ tale che $\| x_0 - \bar{x} \| < \delta \longrightarrow \| x - \bar{x} \| < \varepsilon$

$\bar{x}$ NON è semplicemente stabile

- le definizioni di stabilità hanno carattere locale
- nel caso di sistemi lineari si parla di stabilità del sistema dal momento che è sempre possibile "spostare" l'equilibrio nell'origine

$$\dot{x} = Fx \qquad \bar{x} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \delta x = x - \bar{x} \quad \longrightarrow \quad x = \delta x + \bar{x}$$

$$\longrightarrow \quad \dot{\delta x} = \dot{x} - \dot{\bar{x}} = \dot{x} = Fx$$

$$\overset{!}{=} F(\delta x + \bar{x}) = F \delta x \qquad \bar{\delta x} = 0$$

PROCEDURA di LINEARIZZAZIONE (attorno a un punto di equilibrio)

- sistemi autonomi ($u=0$)

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad t \in \mathbb{R}^+ \qquad \underline{\text{sistema scalare}} \text{ con } \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ punto di eq.}$$
$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} \qquad , \ \delta x(t) \in \mathbb{R}$$

allora

$$f(x(t)) = f(\bar{x}) + \frac{d}{dx} f(\bar{x})\,\delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} f(\bar{x})\,\delta x^2 \ \dots$$
$$\approx \underbrace{\cancel{f(\bar{x})}}_{0} + \frac{d}{dx} f(\bar{x})\,\delta x$$

$$\dot{\delta}_x = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}$$
$$\overset{!}{=} f(x(t)) - 0$$
$$\overset{!}{=} \frac{d}{dx} f(\bar{x})\,\delta x \longrightarrow \dot{\delta}_x = \bar{F}\,\delta_x$$
$$\bar{F} = \frac{d}{dx} f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}^+ \qquad \underline{\text{sistema multivariato}} \text{ con } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.}$$
$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} \qquad , \ \delta x \in \mathbb{R}^n$$

allora

$$f(x(t)) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\,\delta x + \dots$$
$$\approx \underbrace{\cancel{f(\bar{x})}}_{0} + J_f(\bar{x})\,\delta x$$

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad \begin{matrix} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$$

$$\dot{\delta}_x = J_f(\bar{x})\,\delta x \longrightarrow \dot{\delta}_x = \bar{F}\,\delta_x$$
$$\bar{F} = J_f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\qquad$ $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$ $\qquad$ $\dot{\delta}_x = \cos\bar{x} \cdot \delta_x$ $\qquad$ $\dot{\delta}_x = \delta_x$, $\dot{\delta}_x = -\delta_x$

2. $\dot{x} = a \cdot x^3,\ a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\bar{x} = 0$ $\qquad$ $\dot{\delta}_x = 3\bar{x}^2 \cdot \delta_x$ $\qquad$ $\dot{\delta}_x = 0$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = \overbrace{-x_2 + x_1 x_2^2}^{f_1(x_1, x_2)} \\ \dot{x}_2 = \underbrace{x_1 + x_2^5}_{f_2(x_1, x_2)} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{matrix}$$

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 & -1+2x_1x_2 \\ 1 & 5x_2^4 \end{bmatrix}\Bigg|_{\bar{x}=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\delta x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \delta x$$

- sistemi con ingresso costante $(u = \bar{u})$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ \vdots \\ f_n(x,u) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

sistema multivariato con $\bar{x}$ eq. e $\bar{u}$ ingr

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}, \quad \delta x(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$\delta u(t) = u(t) - \bar{u}, \quad \delta u(t) \in \mathbb{R}^m$$

allore

$$f(x,u) = \underbrace{\cancel{f(\bar{x},\bar{u})}}_{0} + J_f^{(x)}(\bar{x},\bar{u})\,\delta x + J_f^{(u)}(\bar{x},\bar{u}) \cdot \delta u + \dots$$

$$J_f^{(x)}(x,u) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$J_f^{(u)}(x,u) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right]_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$\dot{\delta x} = J_f^{(x)}(\bar{x},\bar{u})\,\delta x + J_f^{(u)}(\bar{x},\bar{u})\,\delta u \longrightarrow \dot{\delta x} = \bar{F}\,\delta x + \bar{G}\,\delta u$$

$$\bar{F} = J_f^{(x)}(\bar{x},\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
$$\bar{G} = J_f^{(u)}(\bar{x},\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$$