① MODELLIZZAZIONE di SISTEMI DINAMICI

Sistema : oggetto (fisico o artificale) composto da più elementi reciprocamente interconnessi e interagenti tra loro e con l'esterno secondo rapporti di causa - effetto i quali determinano il comportamento temporale del tutto

$u \longrightarrow \boxed{\ \Sigma\ } \longrightarrow y$

- $\sigma_1 \dots \sigma_n$: variabili di interesse
- Σ : modello matematico che descrive l'evoluzione di $\sigma_1 \dots \sigma_n$
- variabili di ingresso (cause) : u
- variabili di uscite (effetti) : y

CLASSIFICAZIONE di SISTEMI

sistema Σ

- deterministico $\rightarrow$ leggi deterministiche
- stocastico $\rightarrow$ leggi probabilistiche

- dinamico $\rightarrow$ t $\propto$ evoluzione temporale in un certo intervallo
- statico $\rightarrow$ t $\propto$ stesso t

sistema Σ dinamico

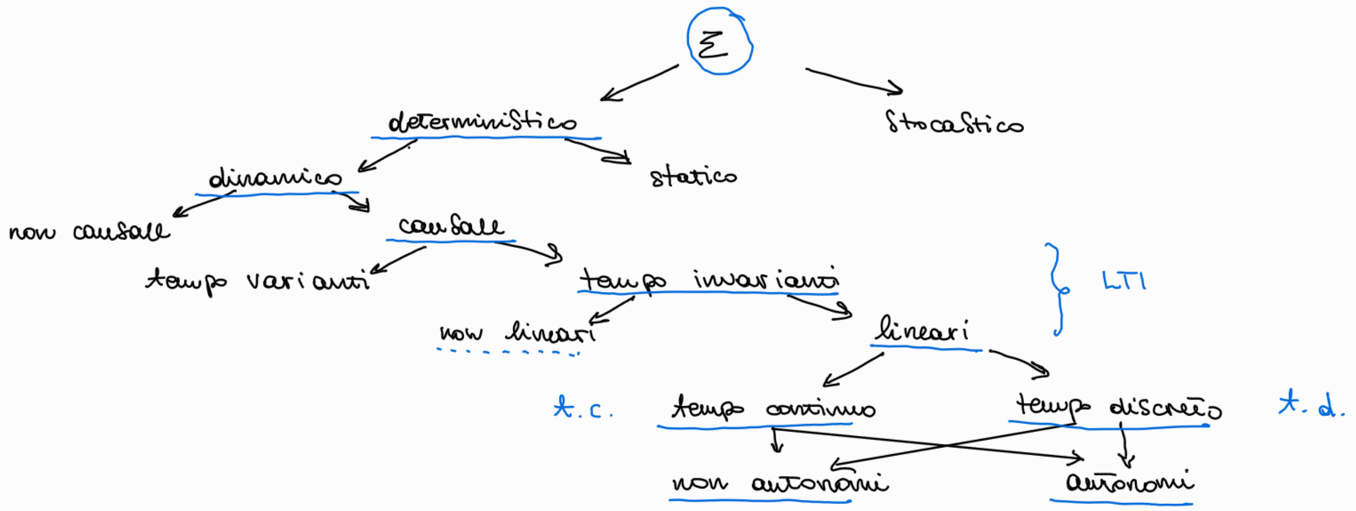
- causale $\rightarrow$ $y(t)$ $\propto$ $y(s)$ e/o $u(s)$ $\quad s \leq t$
- non causale $\rightarrow$ $y(t)$ $\propto$ $y(s)$ e/o $u(s)$ $\quad s > t$

- tempo invariante $\rightarrow$ indipendente da t
- tempo variante $\rightarrow$ dipendente da t

- lineare
- non lineare

- tempo continuo : $t \in \mathbb{R}^+$
- tempo discreto : $t \in \mathbb{N}$

- autonomo : $u = 0$
- non autonomo : $u \neq 0$



RAPPRESENTAZIONE di SISTEMI

Σ dinamico

- rappresentazione esterna o ingresso / uscita (I/O)

  2 ingredienti

  - insieme delle funzioni che rappresentano le variabili di ingresso e uscita
  - trasformazione tra questi insiemi (mappa ingresso/uscita)

$*$ Σ : t.c.

- dominio del tempo : equazioni differenziali

  $h(y^{(n)} \dots y^{(0)}, u^{(m)} \dots u^{(0)}, t) = 0$ + cond. iniziali

- LTI dominio della frequenza : FdT ~ trasformate di laplace

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)} \quad \overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} \quad W(s) \propto (a_i, b_j)$$

$*$ Σ : t.d.

- dominio del tempo : equazioni alle differenze

  $h(y(t-t_n) \cdots y(t), u(t-t_m), \dots u(t), t) = 0$ + cond. iniz.

- LTI dominio delle frequenze : FdT ~ trasformate Zeta

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(t-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(t-j) \quad \overset{Z}{\rightsquigarrow} \quad W(z) \propto (a_i, b_j)$$

- rappresentazione interna o di stato

  4 ingredienti

  - insieme delle funzioni che rappresentano le variabili di ingresso e uscita
  - insieme delle funzioni che rappresentano le variabili di stato

$x(t)$: variabili di stato

proprietà di separazione : $\exists$ $x(t)$, $u(\tau)$ con $\tau \geq t$ $\forall$ informazione minima necessaria a determinare l'evoluzione del sistema da t in poi

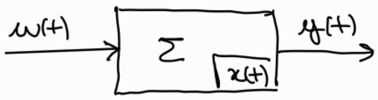
- mappa di transizione di stato che descrive come si aggiornano le variabili di stato da t_0 a t noto $x(t_0)$ e $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$
- mappa di uscita che descrive come si aggiornano le variabili di uscita --> legame tra $x(t), u(t)$ e $y(t)$

$*$ Σ t.c. $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$ $x(t_0) = x_0$ f : mappa di trans. di stato; h : mappa delle uscite

$*$ Σ t.d. $\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$ $x(t_0) = x_0$ f : mappa di trans. di stato; h : mappa delle uscite

$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

RAPPRESENTAZIONE di SISTEMI LTI



$u(t) = [u_1(t) \ \cdots \ u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$: m variabili di ingresso

$x(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$: n variabili di stato

$y(t) = [y_1(t) \ \cdots \ y_p(t)]^T \in \mathbb{R}^p$: p variabili di uscita

- Σ t.c. LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_{11} x_1(t) + \cdots + f_{1n} x_n(t) + g_{11} u_1(t) + \cdots + g_{1m} u_m(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_{n1} x_1(t) + \cdots + f_{nn} x_n(t) + g_{n1} u_1(t) + \cdots + g_{nm} u_m(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}}_{\substack{F \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \text{matrice di stato}}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix}}_{\substack{G \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ \text{matrice di ingresso}}} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$f_{ij}, g_{km} \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\dot{x}(t) = F x(t) + G u(t)}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = h_{11} x_1(t) + \cdots + h_{1n} x_n(t) + j_{11} u_1(t) + \cdots + j_{1m} u_m(t) \\ \vdots \\ y_p(t) = h_{p1} x_1(t) + \cdots + h_{pn} x_n(t) + j_{p1} u_1(t) + \cdots + j_{pm} u_m(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{p1} & \cdots & h_{pn} \end{bmatrix}}_{\substack{H \in \mathbb{R}^{p \times n} \\ \text{matrice delle uscite}}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ j_{p1} & \cdots & j_{pm} \end{bmatrix}}_{\substack{J \in \mathbb{R}^{p \times m} \\ \text{matrice di feedback}}} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$h_{ij}, j_{km} \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y(t) = H x(t) + J u(t)}$$

$\longrightarrow \quad \Sigma = (F, G, H, J)$

Σ t.d. LTI

$x(t+1) = F x(t) + G u(t)$ $\qquad F \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ G \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$y(t) = H x(t) + J u(t) \qquad H \in \mathbb{R}^{p \times n}, \; J \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$\longrightarrow \quad \Sigma = (F, G, H, J)$$

principio di sovrapposizione degli effetti

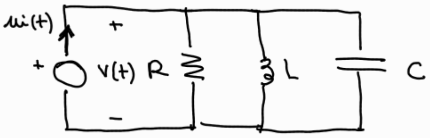
$x'(\cdot), y'(\cdot)$: stato e uscita del sistema per x_0' e $u'(\cdot)$
$x''(\cdot), y''(\cdot)$: stato e uscita del sistema per x_0'' e $u''(\cdot)$

$\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1 x_0' + \alpha_2 x_0'' \\ u &= \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 x'' \\ y &= \alpha_1 y' + \alpha_2 y'' \end{aligned}$$

esempi

① sistema elettrico : circuito RLC



$u_i(t)$: input
$v(t)$: output

condizioni iniziali nulle

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R\, i_R(t) & &\longrightarrow & i_R(t) &= \frac{1}{R} v_R(t) \\ v_L(t) &= L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} & &\longrightarrow & \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L} v_L(t) \\ i_C(t) &= C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} & &\longrightarrow & i_C(t) &= C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$u_i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$$

$$v(t) = v_R(t) = v_L(t) = v_C(t)$$

- rappresentazione esterna

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} &= \frac{di_R(t)}{dt} + \frac{di_C(t)}{dt} + \frac{di_L(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{dv_R(t)}{dt} + C \cdot \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{L} v_L(t) \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{dv(t)}{dt} + C \cdot \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{L} v(t) \end{aligned}$$

$$\dot{u}_i(t) = \frac{1}{R} \dot{v}(t) + C \ddot{v}(t) + \frac{1}{L} v(t)$$

$$\ddot{v}(t) + \frac{1}{RC} \dot{v}(t) + \frac{1}{LC} v(t) - \frac{1}{C} \dot{u}_i(t) = 0$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$s^2 V(s) + \frac{1}{RC} s V(s) + \frac{1}{LC} V(s) - \frac{1}{C} s U(s) = 0$$

$$W(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$$

- rappresentazione interna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= v \\ x_2 &= i_L \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= u_i \\ y &= v \end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{v} = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C}(u_i - i_R - i_L) = \frac{1}{C}\left(u_i - \frac{v}{R} - i_L\right) = \frac{1}{C}\left(u_i - \frac{x_1}{R} - x_2\right)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{i}_L = \frac{1}{L} v_L = \frac{1}{L} v = \frac{1}{L} x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$n=2$
$m=1$
$p=1$

$$y = v = x_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = 0$$

- sistema meccanico : massa - molla - smorzatore

$z(t)$: output
$f(t)$: input

$$m\ddot{z} = \sum f \overset{!}{=} f(t) - k \cdot z(t) - \beta \dot{z}(t)$$

- rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

$$\mathcal{L}\Big(\quad ms^2 Z(s) + \beta s Z(s) + k Z(s) - F(s) = 0$$

$$W(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

- rappresentazione interna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \dot{z} = \dot{x}_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= f \\ y &= z \end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{z} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{1}{m}(-\beta\dot{z} - kz - f) = \frac{1}{m}(-\beta x_2 - k x_1 - u)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\beta/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = 0$$