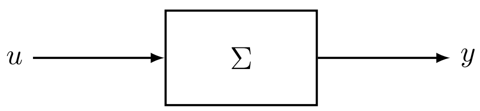
1 MODELLIZZAZIONE DI SISTEMI DINAMICI

1.1 Definizione di sistema dinamico

sistema: un qualunque oggetto (fisico o artificiale) costituito da diversi elementi reciprocamente interconnessi e interagenti tra loro o con l'ambiente esterno in relazioni di causa-effetto che determinano l'evoluzione temporale del tutto

Gli elementi di un sistema sono generalmente associati ad attributi misurabili, denominati comunemente *variabili*, che descrivono l'andamento temporale del sistema stesso mediante modelli matematici.



$\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse
Σ : modello matematico che descrive l'evoluzione di $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$

$\rightarrow$ in molti casi le variabili $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ si possono distinguere in
- variabili di ingresso/input u (causa)
- variabili di uscita/output y (effetto)

Perché studiare Σ e le sue proprietà? Perché usare la matematica?
è necessario **capire** il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) **controllarlo**. La matematica sembra essere il linguaggio "naturale" per descrivere fenomeni fisici e ingegneristici, infatti fornisce gli strumenti che permettono di descrivere e analizzare in maniera **quantitativa** il comportamento di Σ

1.2 Classificazione di sistemi

Un sistema Σ può essere classificato in vari modi a seconda delle sue caratteristiche:

- **deterministico:** il comportamento del sistema è descritto da leggi deterministiche
- **stocastico:** il comportamento del sistema è descritto da leggi probabilistiche

- **dinamico:** il valore assunto dalle variabili d'interesse ad un certo istante temporale t dipende dall'evoluzione delle stesse in determinati intervalli
- **statico:** il valore assunto dalle variabili di interesse ad un certo istante temporale t dipende solo dal valore assunto dalle stesse in t

Un sistema Σ *dinamico* può essere ulteriormente classificato come

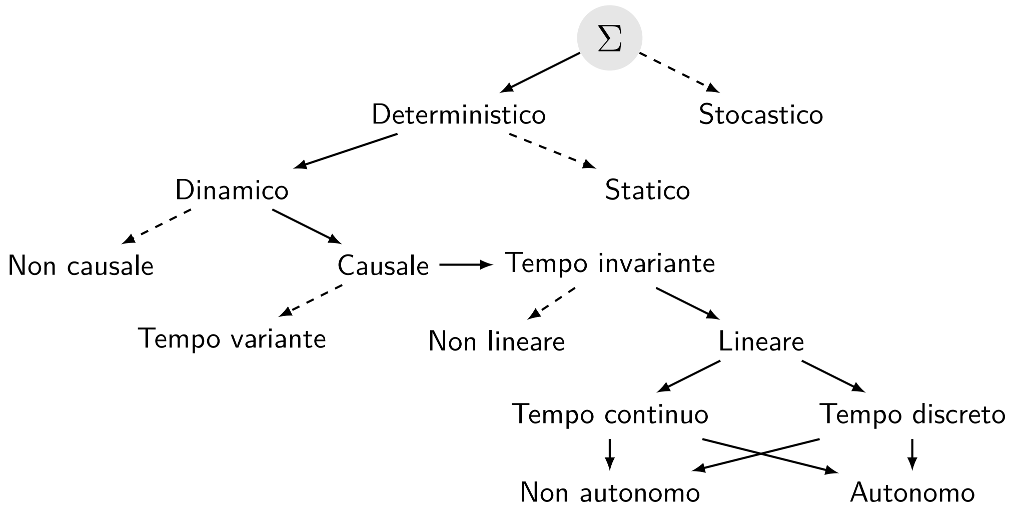
- **causale:** il valore assunto da $y(t)$ dipende dal valore assunto da $y(s)$ e/o $u(s)$ per $s \leq t$
- **non causale:** il valore assunto da $y(t)$ dipende dal valore assunto da $y(s)$ e/o $u(s)$ per $s > t$

- **tempo invariante:** la legge che lega le variabili di interesse è indipendente da t
- **tempo variante:** la legge che lega le variabili di interesse è dipendente da t

- **lineare:** la legge che lega le variabili di interesse è di tipo lineare
- **non lineare:** la legge che lega le variabili di interesse è non di tipo lineare

- **tempo continuo:** il comportamento del sistema è descritto dalla variabile temporale $t \in \mathbb{R}$
- **tempo discreto:** il comportamento del sistema è descritto dalla variabile temporale $t \in \mathbb{Z}$

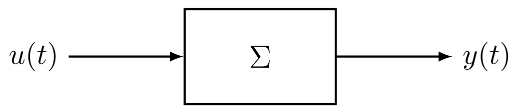
- **autonomo:** il sistema non è caratterizzato da variabili di ingresso $(u = 0)$
- **non autonomo:** il sistema è caratterizzato da variabili di ingresso $(u \neq 0)$



1.3 Rappresentazione di sistemi

Esistono due modi di rappresentare un sistema Σ dinamico:

- **rappresentazione esterna o ingresso-uscita (I/O)**
  Ingredienti della rappresentazione esterna di un sistema sono
  - gli insiemi di funzioni del tempo che rappresentano le variabili di ingresso e uscita;
  - una trasformazione fra questi insiemi (mappa ingresso/uscita) che riflette i legami e i rapporti di causalità tra le variabili fisiche.

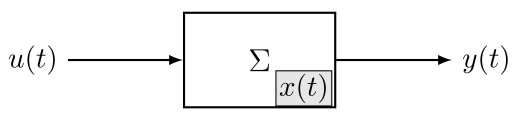
  Σ a tempo continuo: la rappresentazione esterna nel dominio del tempo si basa su equazioni differenziali
  $\rightarrow h\left(y^{(n)} \dots \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t) \dots \dot{u}(t), u(t), t\right) = 0 +$ c.i.

  Σ a tempo continuo lineare tempo invariante: la rappresentazione esterna nel dominio della frequenza si basa sulla trasformata di Laplace
  $\rightarrow$ F.d.T. $W(s) = Y(s)/U(s)$

  Σ a tempo discreto: la rappresentazione esterna nel dominio del tempo si basa su equazioni alle differenze
  $\rightarrow h\left(y(t-t_n) \dots y(t-1), y(t), u(t-t_m) \dots u(t-1), u(t), t\right) = 0 +$ c.i.

  Σ a tempo discreto lineare tempo invariante: la rappresentazione esterna nel dominio della frequenza si basa sulla trasformata Zeta
  $\rightarrow$ F.d.T. $W(z) = Y(z)/U(z)$

- **rappresentazione interna o di stato**
  Gli ingredienti della rappresentazione interna di un sistema comprendono oltre agli insiemi delle funzioni di ingresso e di uscita,
  - l'insieme delle funzioni che descrivono l'evoluzione temporale delle *variabili di stato*

  $x(t)$: variabili di stato (memoria interna) *proprietà di separazione:* ad ogni istante di tempo t, i valori assunti in t dalle variabili di stato forniscono tutta l'informazione sulla storia passata del sistema necessaria per valutare l'andamento futuro delle variabili di stato e delle uscite, noto l'andamento degli ingressi per tempi successivi a t.

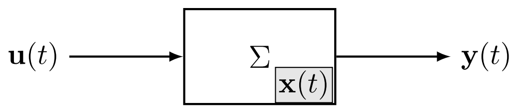
e due mappe:

- la mappa di transizione di stato, che dà conto di come si aggiornano le variabili di stato da un istante iniziale t_0 ad uno successivo t per effetto dei valori assunti dalle variabili di stato all'istante iniziale t_0 e degli andamenti delle variabili di ingresso nell'intervallo $[t_0, t)$ compreso fra i due istanti;
- la mappa di uscita, che esprime il legame statico fra i valori ad un certo istante t delle variabili di stato (ed eventualmente di ingresso) ed i valori assunti al medesimo istante t dalle variabili di uscita.

Σ a tempo continuo: $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$ f = mappa di transizione di stato, h = mappa di uscita

Σ a tempo discreto: $\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$ f = mappa di transizione di stato, h = mappa di uscita

1.3.1 Rappresentazione di sistemi lineari



Si consideri il caso generale di un sistema Σ caratterizzato da

- n variabili di stato $x_1(t), \ldots x_n(t)$: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$ vettore di stato
- m variabili di ingresso $u_1(t), \ldots u_m(t)$: $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_m \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^m$ vettore degli ingressi
- p variabili di uscita $y_1(t), \ldots y_n(t)$: $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_p \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^p$ vettore delle uscite

Sia Σ un sistema lineare tempo-invariante (LTI)
allora la sua rappresentazione in spazio di stato è la seguente

Σ a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_{11}x_1(t) + f_{12}x_2(t) + \ldots + f_{1n}x_n(t) + g_{11}u_1(t) + g_{12}u_2(t) + \ldots + g_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) = f_{21}x_1(t) + f_{22}x_2(t) + \ldots + f_{2n}x_n(t) + g_{21}u_1(t) + g_{22}u_2(t) + \ldots + g_{2m}u_m(t) \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_{n1}x_1(t) + f_{n2}x_2(t) + \ldots + f_{nn}x_n(t) + g_{n1}u_1(t) + g_{n2}u_2(t) + \ldots + g_{nm}u_m(t) \\ y_1(t) = h_{11}x_1(t) + h_{12}x_2(t) + \ldots + h_{1n}x_n(t) + j_{11}u_1(t) + j_{12}u_2(t) + \ldots + j_{1m}u_m(t) \\ y_2(t) = h_{21}x_1(t) + h_{22}x_2(t) + \ldots + h_{2n}x_n(t) + j_{21}u_1(t) + j_{22}u_2(t) + \ldots + j_{2m}u_m(t) \\ \quad \vdots \\ y_p(t) = h_{p1}x_1(t) + h_{p2}x_2(t) + \ldots + h_{pn}x_n(t) + j_{p1}u_1(t) + j_{p2}u_2(t) + \ldots + j_{pm}u_m(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) & \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{p\times m} \end{cases}$$

Σ a tempo discreto:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_{11}x_1(t) + f_{12}x_2(t) + \ldots + f_{1n}x_n(t) + g_{11}u_1(t) + g_{12}u_2(t) + \ldots + g_{1m}u_m(t) \\ x_2(t+1) = f_{21}x_1(t) + f_{22}x_2(t) + \ldots + f_{2n}x_n(t) + g_{21}u_1(t) + g_{22}u_2(t) + \ldots + g_{2m}u_m(t) \\ \quad\vdots \\ x_n(t+1) = f_{n1}x_1(t) + f_{n2}x_2(t) + \ldots + f_{nn}x_n(t) + g_{n1}u_1(t) + g_{n2}u_2(t) + \ldots + g_{nm}u_m(t) \\ y_1(t) = h_{11}x_1(t) + h_{12}x_2(t) + \ldots + h_{1n}x_n(t) + j_{11}u_1(t) + j_{12}u_2(t) + \ldots + j_{1m}u_m(t) \\ y_2(t) = h_{21}x_1(t) + h_{22}x_2(t) + \ldots + h_{2n}x_n(t) + j_{21}u_1(t) + j_{22}u_2(t) + \ldots + j_{2m}u_m(t) \\ \quad\vdots \\ y_p(t) = h_{p1}x_1(t) + h_{p2}x_2(t) + \ldots + h_{pn}x_n(t) + j_{p1}u_1(t) + j_{p2}u_2(t) + \ldots + j_{pm}u_m(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}\mathbf{u}(t) & \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{p\times m} \end{cases}$$

Proposizione **(principio di sovrapposizione degli effetti)**
Dato il sistema Σ LTI, siano

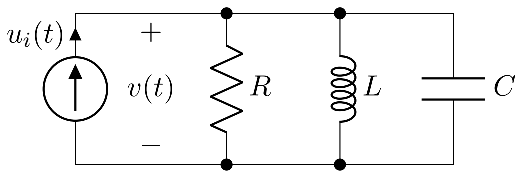
- $\mathbf{x}'(\cdot)$, $\mathbf{y}'(\cdot)$ gli andamenti dello stato e dell'uscita corrispondenti allo stato iniziale $\mathbf{x}_0'$ e all'ingresso $\mathbf{u}'(\cdot)$
- $\mathbf{x}''(\cdot)$, $\mathbf{y}''(\cdot)$ quelli relativo allo stato iniziale $\mathbf{x}_0''$ e all'ingresso $\mathbf{u}''(\cdot)$

allora, scelte arbitrariamente le costanti α_1 e α_2, le evoluzioni di stato e uscita in corrispondenza allo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{x}_0' + \alpha_2\mathbf{x}_0''$ e all'ingresso $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}' + \alpha_2\mathbf{u}''$ sono date rispettivamente da $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}' + \alpha_2\mathbf{x}''$ e $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{y}' + \alpha_2\mathbf{y}''$.

Perché lo spazio di stato?

- Rappresentazione "naturale" per molti sistemi fisici (meccanici/elettrici)
- Si lavora direttamente nel dominio temporale evitando trasformate/antitrasformate
- Si gestiscono più facilmente sistemi MIMO (multi-input multi-output)
- Problemi di analisi e controllo diventano più facili da un punto di vista numerico
- La teoria dei controlli "moderna" si basa sullo spazio di stato

esempio: sistema elettrico - circuito RLC



$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

F.d.T. $\quad G(s) = \dfrac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$

Rappresentazione interna

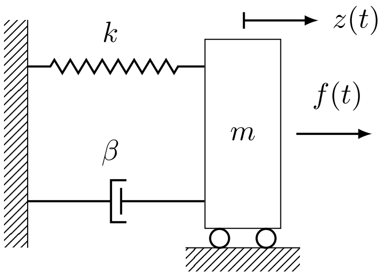
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_1 = v,\ x_2 = i_L, \qquad u = u_i,\ y = x_1 = v$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = J = 0$$

⊠

esempio: sistema meccanico - massa, molla, smorzatore



$f(t)$ = input, $z(t)$ = output

Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

F.d.T. $\quad G(s) = \dfrac{1}{ms^2 + \beta s + k}$

Rappresentazione interna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_1 = z,\ x_2 = \dot{x}, \qquad u = f,\ y = x_1 = z$$

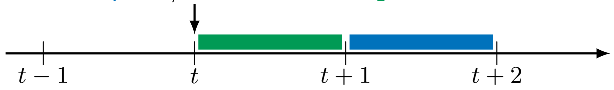
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = J = 0$$

⊠

esempio: sistema compartimentale - magazzino merci

ordine di acquisto/richiesta di consegna



$u_1(t)$, $u_2(t)$ = input, $y(t)$ = output

$y(t)$ = quantità merce in magazzino al mese t

$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al mese t

$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al mese t

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

F.d.T. $\quad G_1(z) = \dfrac{z^{-1}}{z-1}, \; G_2(z) = -\dfrac{1}{z-1}$

Rappresentazione interna

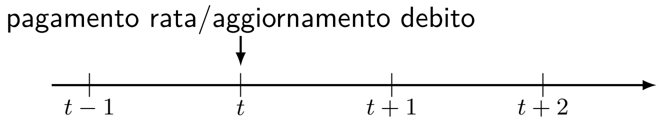
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_1(t) = y(t),\; x_2(t) = u_1(t-1), \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⊠

esempio: sistema finanziario - estinzione debito



$y(t)$ = debito al mese t = output
$u(t)$ = rata al mese t = input
I = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - (1+I)y(t) + u(t+1) = 0$$

F.d.T. $\quad G(z) = -\dfrac{z}{z-(1+I)}$

Rappresentazione interna

$$x(t) = y(t) + u(t)$$

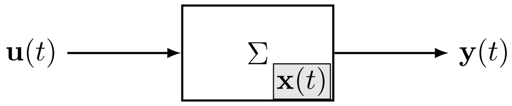
$$F = 1 + I \quad G = -1 - I$$
$$H = 1 \qquad J = -1$$

⊠

Come scegliere le variabili di stato?
Nel caso di sistemi fisici, in generale, conviene scegliere come variabili di stato grandezze legate all'energia accumulata dal sistema:

- sistemi elettrici: nel caso di circuiti elettrici RLC è possibile derivare modelli lineari selezionando come variabili di stato l'insieme di tutte le correnti che attraversano le induttanze e di tutte le tensioni ai capi dei condensatori (se il circuito è composto di k induttanze e h condensatori si otterrà un modello lineare di ordine $h+k$);
- sistemi meccanici: è possibile derivare modelli lineari selezionando come variabili di stato l'insieme di tutte le posizioni e le velocità delle masse in gioco o, nel caso di masse vincolate a un moto circolare, le posizioni angolari e le velocità angolari;
- sistemi termici: è possibile derivare modelli lineari selezionando come variabili di stato l'insieme di tutte le temperature dei componenti del sistema.

1.3.2 Rappresentazione di sistemi non-lineari

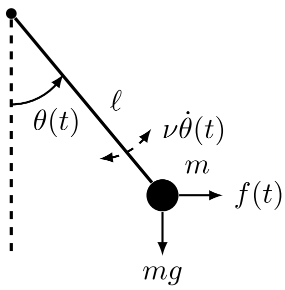


Si consideri il caso generale di un sistema Σ caratterizzato da

- n variabili di stato $x_1(t), \dots x_n(t)$: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$ vettore di stato
- m variabili di ingresso $u_1(t), \dots u_m(t)$: $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_m \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^m$ vettore degli ingressi
- p variabili di uscita $y_1(t), \dots y_n(t)$: $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_p \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^p$ vettore delle uscite

Sia Σ un sistema **non** lineare tempo-invariante
allora qual è la sua rappresentazione esterna ed interna?

esempio: sistema meccanico - pendolo semplice con attrito

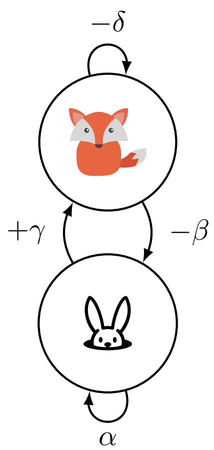


$f(t)$ = input, $\theta(t)$ = output

Rappresentazione esterna	Rappresentazione interna
$m\ell^2\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + mg\ell\sin\theta - f\ell\cos\theta = 0$	$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta}, \quad u = f, y = \theta$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\nu}{m\ell^2}x_2 + \frac{1}{ml}\cos x_1 u \\ y = x_1 \end{cases}$

⊠

esempio: sistema compartimentale - popolazioni prede-predatori



$\left.\begin{array}{l} n_1(t) = \text{numero di prede al tempo } t \\ n_2(t) = \text{numero di predatori al tempo } t \end{array}\right\}$ output

α = tasso crescita prede, se isolate
β = tasso decrescita prede causato da predatori
γ = tasso crescita predatori per la presenza di prede
δ = tasso decrescita predatori, se isolati

Rappresentazione esterna	Rappresentazione interna
?	$x_1 = n_1,\ x_2 = n_2$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = \gamma x_1 x_2 - \delta x_2 \end{cases}$

☒

1.4 Linearizzazione di sistemi dinamici

linearizzazione: approssimazione di un sistema non lineare con un sistema lineare intorno a una determinata condizione operativa

Dato il sistema LTI scalare ($f \in \mathbb{R}$)

$$\dot{x}(t) = fx(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{(t.c.)} \quad \text{allora} \quad x(t) = e^{ft}x_0$$

$$x(t+1) = fx(t), \quad t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \quad \text{allora} \quad x(t) = f^t x_0$$

si dice

- *traiettoria di stato* del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$ l'insieme $\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$
- *ritratto di fase* del sistema l'insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

intorno a quale condizione operativa/stato linearizzare il sistema? specie se si tratta di un sistema non scalare?

1.4.1 Punti di equilibrio

- **sistemi autonomi**

punto di equilibrio: $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$ (o analogamente $\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t))$, $t \in \mathbb{Z}_+$) se l'evoluzione dello stato corrispondente allo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}$, è la costante $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}, \forall t \geq 0$.

Dato il sistema TI

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{(t.c.)} \quad \text{allora} \quad \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio} \Leftrightarrow f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

$$\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t)), \quad t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \quad \text{allora} \quad \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}} = f(\bar{\mathbf{x}})$$

Dato il sistema LTI

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{(t.c.)} \quad \text{allora} \quad \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}} \in \ker \mathbf{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \quad \text{allora} \quad \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}} \in \ker(\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | (\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

esempio: punti di equilibrio

1. $\dot{x} = x(1-x) \quad \Longrightarrow \quad$ due equilibri: $\bar{x} = \{0, 1\}$
2. $\dot{x} = x^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad$ nessun equilibrio

3. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \Longrightarrow \quad$ unico equilibrio: $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \Longrightarrow \quad$ infiniti equilibri: $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxtimes$

- **sistemi con ingresso costante**

punto di equilibrio: $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$ (o analogamente $\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $t \in \mathbb{Z}_+$) se l'evoluzione dello stato corrispondente allo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}$ e all'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}, \forall t \geq 0$, è la costante $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}, \forall t \geq 0$.

Dato il sistema TI

$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\quad t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.) allora $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ equilibrio $\Leftrightarrow f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0$

$\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\quad t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.) allora $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ equilibrio $\Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}} = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$

Dato il sistema LTI

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$, $\quad t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.) allora $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ equilibrio $\Leftrightarrow \mathbf{F}\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{G}\bar{\mathbf{u}}$

$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$, $\quad t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.) allora $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ equilibrio $\Leftrightarrow (\mathbf{F} - \mathbf{I})\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{G}\bar{\mathbf{u}}$

esempio: punti di equilibrio

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ nessun equilibrio

2. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \quad \Longrightarrow \quad$ infiniti equilibri $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad$

nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$

un equilibrio $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$

due equilibri $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

$\boxtimes$

1.4.2 Stabilità semplice e asintotica

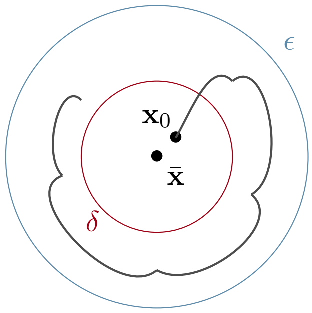
stabilità

semplice: un punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ è detto semplicemente stabile se

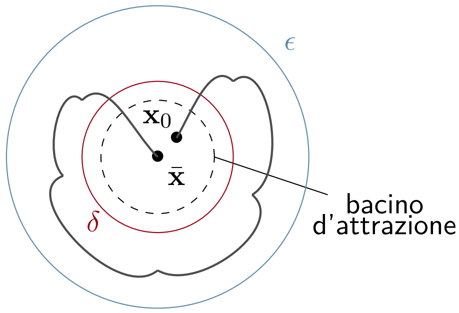
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

asintotica: un punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se

1. $\bar{\mathbf{x}}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ per ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{\mathbf{x}}$



$\bar{\mathbf{x}}$ semplicemente stabile



$\bar{\mathbf{x}}$ asintoticamente stabile

- Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere **locale**. Se però la condizione 2 della stabilità asintotica vale per ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si parla di stabilità asintotica **globale**.
- Per sistemi lineari si può parlare di **stabilità del sistema** invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un opportuno cambio di variabile, si può sempre "spostare" l'equilibrio in $\bar{\mathbf{x}} = 0$.

1.4.3 Procedura di linearizzazione

- **sistemi autonomi**

  Sia

  - $\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema **scalare** con $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio
  - $\delta_x \triangleq x - \bar{x}$

  allora $f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\delta_x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})\delta_x^2 + \dots \quad \approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\delta_x$

  $$\boxed{\text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}: \quad \dot{\delta}_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\, \delta_x}$$

  Sia

  - $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema **multivariato** con $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio
  - $\boldsymbol{\delta}_x \triangleq \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$

  allora $f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_f(\bar{\mathbf{x}})\boldsymbol{\delta}_x + \dots \approx f(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_f(\bar{\mathbf{x}})\boldsymbol{\delta}_x$ con $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

  $$\boxed{\text{sistema linearizzato attorno a } \bar{\mathbf{x}}: \quad \dot{\boldsymbol{\delta}}_x = \mathbf{J}_f(\bar{\mathbf{x}})\, \boldsymbol{\delta}_x}$$

esempio: linearizzazione di sistemi autonomi

1. $\dot{x} = \sin x$
$$\begin{matrix} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{matrix} \implies \begin{matrix} \dot{\delta}_x = \delta_x, & \delta_x \triangleq x \\ \dot{\delta}_x = -\delta_x, & \delta_x \triangleq x - \pi \end{matrix}$$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \bar{x} = 0 \implies \dot{\delta}_x = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\delta}}_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta} x, \quad \boldsymbol{\delta} x \triangleq \mathbf{x}$

⊠

- **sistemi con ingresso costante**

  Sia

  - $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+$ sistema **multivariato** con $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio relativo all'ingresso costante $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$
  - $\boldsymbol{\delta}_x \triangleq \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$
  - $\boldsymbol{\delta}_u \triangleq \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$

  allora $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{J}_f^{(x)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})\boldsymbol{\delta}_x + \mathbf{J}_f^{(u)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})\boldsymbol{\delta}_u + \dots$ con $\mathbf{J}_f^{(x)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left[\dfrac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

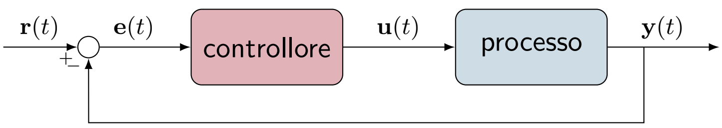
  $$\mathbf{J}_f^{(u)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left[\dfrac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial u_j}\right]_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

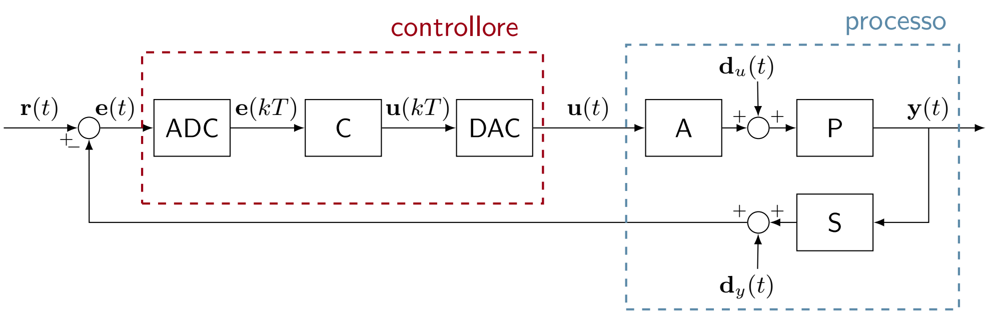
  $$\boxed{\text{sistema linearizzato attorno a } \bar{\mathbf{x}} \text{ e } \bar{\mathbf{u}}: \quad \dot{\boldsymbol{\delta}}_x = \mathbf{J}_f^{(x)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})\,\boldsymbol{\delta}_x + \mathbf{J}_f^{(u)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})\,\boldsymbol{\delta}_u}$$

Fino a che il sistema si mantiene in un intorno del punto di equilibrio, la dinamica degli scostamenti può essere approssimata da un sistema lineare. Questa possibilità è molto importante perché:

1. i sistemi lineari sono molto più agevoli da trattare dei sistemi non lineari;
2. nella pratica ingegneristica accade di frequente che ingresso e stato di un sistema non lineare rimangano confinati in un intorno di un punto di equilibrio.

1.5 Modellizzazione di un sistema dinamico reale



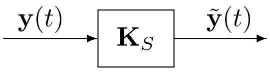


processo

P - processo

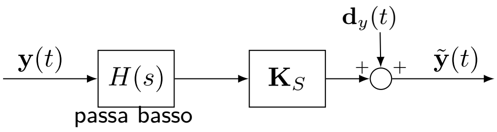
sistema dinamico rappresentato tramite equazioni integro-differenziali, non necessariamente lineari o tempo invarianti (TI)

S - sensore
dispositivo atto a convertire una grandezza (fisica) di interesse in un segnale (elettrico) compatibile con il sistema di controllo

- modello ideale 

$$\boxed{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{K}_S \mathbf{y}(t)}$$

(modello super ideale: $\mathbf{K}_S = \mathbf{I}$, altrimenti: $\mathbf{K}_S = diag(k_i)\mathbf{I}$ fattore di scala $\sim$ cambio di unità di misura)

- modello reale 

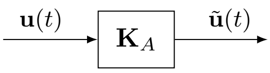
$$\boxed{\tilde{\mathbf{y}}(t) = H(s)\mathbf{K}_S \mathbf{y}(t) + \mathbf{d}_y(t)}$$

$\mathbf{d}_y(t) \propto$ accuratezza
gap tra uscita reale e ideale
precisione
ripetibilità dei risultati

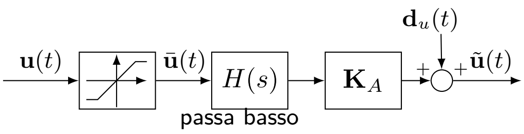
$$H(s) = \frac{1}{1 + sT_b}$$

$T_b \propto$ banda passante

A - attuatore
dispositivo atto a convertire il segnale (elettrico) di controllo in una grandezza (fisica) compatibile con il processo

- modello ideale 

$$\boxed{\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K}_A \mathbf{u}(t)}$$

- modello reale 

$$\boxed{\tilde{\mathbf{u}}(t) = H(s)\mathbf{K}_A \bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{d}_u(t)}$$

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_{max} & \mathbf{u}(t) > \mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{u}(t) & \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{u}_{min} & \mathbf{u}(t) < \mathbf{u}_{min} \end{cases}$$

$\mathbf{d}_u(t) \propto$ accuratezza
precisione

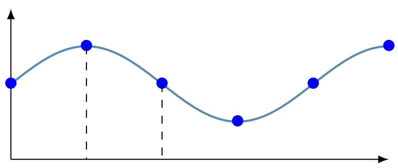
$H(s) = \frac{1}{1+sT_b}$

$T_b \propto$ banda passante

controllore

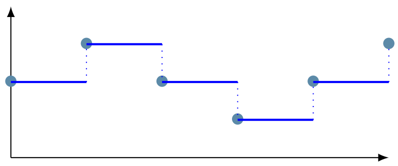
C: controllore digitale

ADC: convertitore analogico-digitale, che trasforma un segnale continuo in un segnale a valori finiti (bits) e campionato con uno specifico periodo di campionamento



T
tempo di
campionamento

DAC: convertitore digitale-analogico (simile a un interpolatore) che trasforma un segnale digitale in un segnale analogico continuo



ritardo di $\frac{T}{2}$

non trascurabile se dello stesso ordine
di grandezza del segnale d'ingresso

1.5.1 Modello del quadrotor

quadrotor/quadrirotore o quadcopter/quadricottero
Unmanned Aerial Vehicle (**UAV**) - veicolo aereo caratterizzato dall'assenza del pilota a bordo

- corpo rigido principale - struttura a croce/a X
- 4 attuatori - 4 propellers : motori brushless + eliche

modello cinematico e dinamico
Dal punto di vista cinematico e dinamico,
un quadrotor è modellabile come un *corpo rigido nello spazio 3D* con

- massa $m \in \mathbb{R}$
- inerzia $\mathbf{J} = \text{diag}(J_x, J_y, J_z) \in \mathbb{R}^{3\times3}$

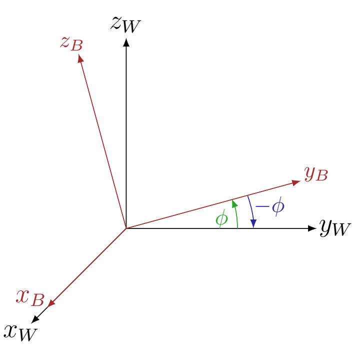
Si introducono due sistemi di riferimento:

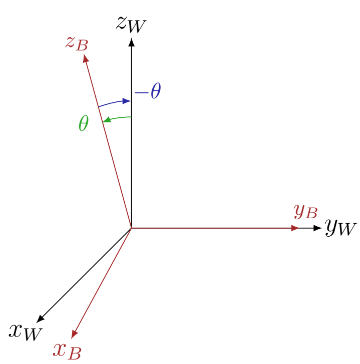
$\mathscr{F}_W = \{0_W, (\mathbf{x}_W, \mathbf{y}_W, \mathbf{z}_W)\}$	*world frame*	(globale e fisso)
$\mathscr{F}_B = \{0_B, (\mathbf{x}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{z}_B)\}$	*body frame*	(locale e centrato nel centro di massa del vivolo)

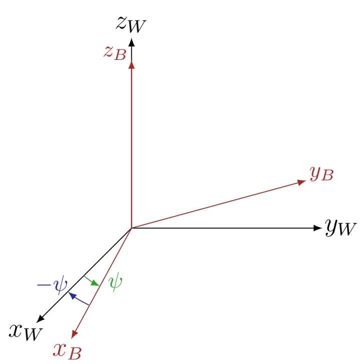
di conseguenza, la posa (posizione + orientamento) del quadrotor è definita da

$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$	posizione di O_B in $\mathscr{F}_W$
$\mathbf{R} \in SO(3)$	orientamento di $\mathscr{F}_B$ rispetto a $\mathscr{F}_W$
	$(SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid \mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1\}$ gruppo Speciale Ortogonale)

rotazioni elementari







$$\mathbf{R}_X(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_Z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

convenzione

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= {}^{W}\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_Z(\psi)\mathbf{R}_Y(\theta)\mathbf{R}_X(\phi) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^\top : \text{ angoli di roll, pitch, yaw}}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\delta})$$

- **modello cinematico**

  Siano

  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ posizione di O_B in $\mathscr{F}_W$
  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^3$ orientamento di $\mathscr{F}_B$ rispetto a $\mathscr{F}_W$

  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ velocità lineare in $\mathscr{F}_W$
  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ velocità angolare in $\mathscr{F}_B$

  allora

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{T}\boldsymbol{\omega} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix}$$

  $\rightarrow$ la definizione della matrice $\mathbf{T}$ è legata alla scelta della convenzione ZYX per la rappresentazione delle rotazioni

- **modello dinamico**

  Ogni i-esimo attuatore è caratterizzato da un asse di spinning $\mathbf{z}_{P_i} \in \mathbb{R}^3$ e una velocità di spinning $\omega_i \geq 0$. L'asse di spinning, in particolare, è supposto avere orientamento costante in $\mathscr{F}_B$ parallelo all'asse $\mathbf{z}_B$ per cui $\mathbf{z}_{P_i} = \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ e passare per il centro di massa del propeller la cui posizione in $\mathscr{F}_B$ è definita dal vettore $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i,x} & p_{i,y} & p_{i,z} \end{bmatrix}^\top$. Ruotando con velocità ω_i attorno al suo asse, ogni i-esimo attuatore genera

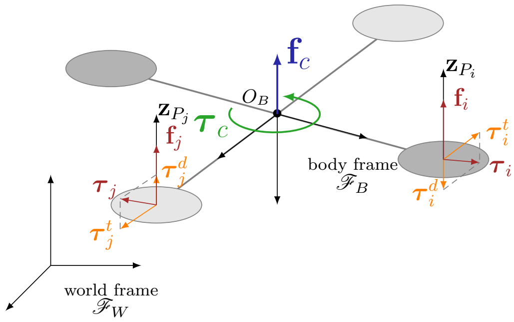
  – forza di thrust: $\mathbf{f}_i = c_f\omega_i^2\,\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_f\omega_i^2 \end{bmatrix}^\top$
  – coppia di thrust: $\boldsymbol{\tau}_i^t = c_f\omega_i^2(\mathbf{p}_i \times \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} c_f\omega_i^2 p_{i,y} & -c_f\omega_i^2 p_{i,x} & 0 \end{bmatrix}^\top$
  – coppia di drag: $\boldsymbol{\tau}_i^d = \pm c_\tau\omega_i^2\,\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm c_\tau\omega_i^2 \end{bmatrix}^\top$

  con $c_f, c_\tau > 0$ parametri che dipendono dalle caratteristiche aerodinamiche e geometriche dell'attuatore (tutti gli attuatori sono supposti uguali sotto questo punto di vista).

  Considerando i contributi di tutti gli attuatori, nel centro di massa del veivoli sono esercitate una forza e una coppia di controllo, ovvero

$$\mathbf{f}_c \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}_c = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_f \sum\limits_{i=1}^{4} \omega_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}_c \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\tau}_c = \sum_{i=1}^{4} (\boldsymbol{\tau}_i^t + \boldsymbol{\tau}_i^d) = \begin{bmatrix} c_f \sum\limits_{i=1}^{4} \omega_i^2 p_{i,y} \\ -c_f \sum\limits_{i=1}^{4} \omega_i^2 p_{i,x} \\ c_\tau \sum\limits_{i=1}^{4} \pm\omega_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$



Di conseguenza, considerando il modello di Eulero-Newton (privo di effetti del secondo ordine), vale che

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= -g\mathbf{e}_3 + m^{-1}\mathbf{R}(\boldsymbol{\delta})\mathbf{f}_c \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= J^{-1}(-\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_c) \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} * & * & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi \\ * & * & -\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi \\ * & * & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -J_z\omega_z & J_y\omega_y \\ J_z\omega_z & 0 & -J_x\omega_x \\ -J_y\omega_y & J_x\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \right)$$

da cui

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m}(\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi)\,F \\ \frac{1}{m}(-\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi)\,F \\ -g + \frac{1}{m}(\cos\theta\cos\phi)\,F \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x}\omega_y\omega_z + \frac{1}{J_x}\tau_1 \\ \frac{J_x - J_z}{J_y}\omega_x\omega_z + \frac{1}{J_y}\tau_2 \\ \frac{J_x - J_y}{J_z}\omega_x\omega_y + \frac{1}{J_z}\tau_3 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

modello linearizzato in spazio di stato in condizione di hovering statico

> *condizione di hovering statico*:
> volo in posizione fissa con orientamento costante e velocità lineare e angolare nulla

Si consideri

- vettore di stato: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \boldsymbol{\delta} & \mathbf{v} & \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x & y & z & \phi & \theta & \psi & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{12}$
- vettore di ingresso di controllo: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{f}_c\| & \boldsymbol{\tau}_c \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} F & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4$

allora cinematica e dinamica del quadrotor sono descritte dal modello non lineare

$$
\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{T}\boldsymbol{\omega} \\ -g\mathbf{e}_3 + m^{-1}\mathbf{R}(\boldsymbol{\delta})\mathbf{f}_c \\ J^{-1}(-\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{T}\boldsymbol{\omega} \\ -g\mathbf{e}_3 \\ J^{-1}(-\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{3\times 1} \\ m^{-1}\mathbf{R}(\boldsymbol{\delta})\mathbf{f}_c \\ J^{-1}\boldsymbol{\tau}_c \end{bmatrix} = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})
$$

dove

$$
f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x + (\sin\phi \tan\theta)\omega_y + (\cos\phi\tan\theta)\omega_z \\ \cos\phi\,\omega_y - \sin\phi\,\omega_z \\ (\sin\phi\tan\theta)\omega_y + \frac{\cos\phi}{\cos\theta}\omega_z \\ 0 \\ 0 \\ -g \\ \frac{J_y - J_z}{J_x}\omega_y\omega_z \\ \frac{J_x - J_z}{J_y}\omega_x\omega_z \\ \frac{J_x - J_y}{J_z}\omega_x\omega_y \end{bmatrix} \qquad f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m}\left(\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi\right)F \\ \frac{1}{m}\left(-\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi\right)F \\ \frac{1}{m}\left(\cos\theta\cos\phi\right)F \\ \frac{1}{J_x}\tau_1 \\ \frac{1}{J_y}\tau_2 \\ \frac{1}{J_z}\tau_3 \end{bmatrix}
$$

e in particolare,

$$
f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}\left(\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi\right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}\left(-\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi\right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}\left(\cos\theta\cos\phi\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_2(\mathbf{x})\mathbf{u}
$$

Di coseguenza, considerando il punto di equilibrio (corrispondente alla condizione di hovering statico)

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} &= [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^\top \\
\bar{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} mg & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top
\end{aligned}
$$

e procedendo alla linearizzazione standard del modello non lineare, ovvero calcolando

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} = \mathbf{J}_f^{(x)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \left.\frac{df_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} + \left.\frac{df_2(\mathbf{x},\mathbf{u})}{d\mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}_f^{(u)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \left.\frac{df_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} + \left.\frac{df_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{d\mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \mathbf{0}_{12\times 4} + \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{x}})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 4} \\ \mathbf{0}_{3\times 4} \\ \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}_4 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix}$$

si ottiene il **modello linearizzato**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 4} \\ \mathbf{0}_{3\times 4} \\ \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}_4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{J_z} \end{bmatrix}$$