UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Segnali e Sistemi

(canale 2)

Laurea in Ing. Biomedica + Elettronica

Anno II, secondo semestre, A.A. 20/21

La trasformata (bilatera) di Laplace

Per segnali a tempo continuo

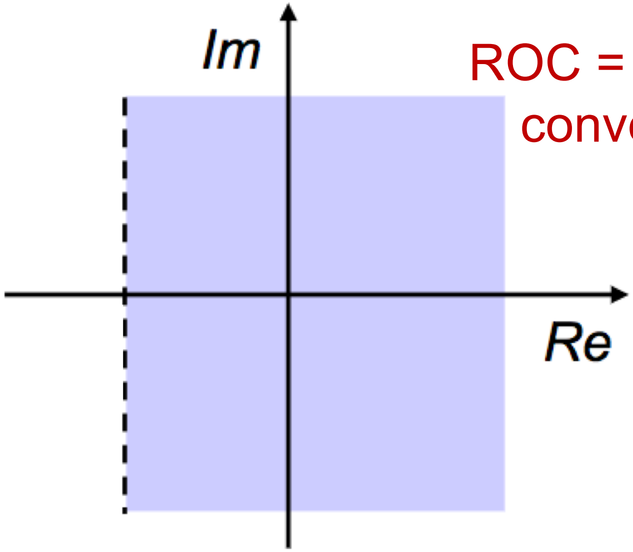
La trasformata di Laplace

generalizzazione della trasformata di Fourier

continuo

$$x(t) \longrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

complesso $s = \sigma + j\omega$



ROC = regione di convergenza

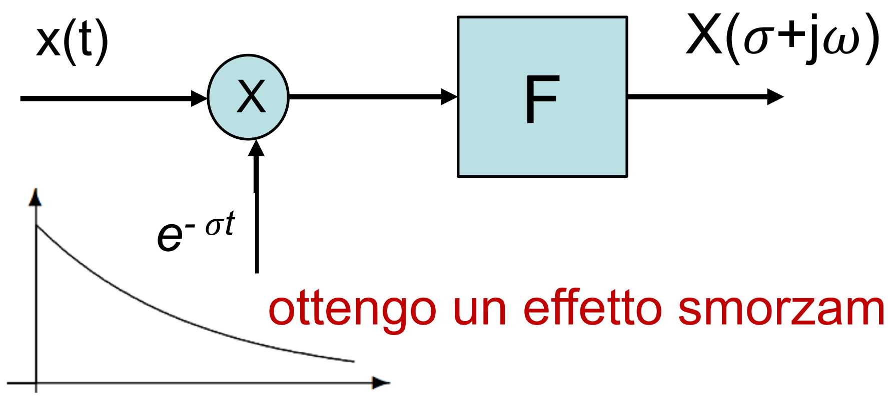
$X(j\omega)$ è la trasformata di Fourier

esiste se la ROC contiene l'asse immaginario

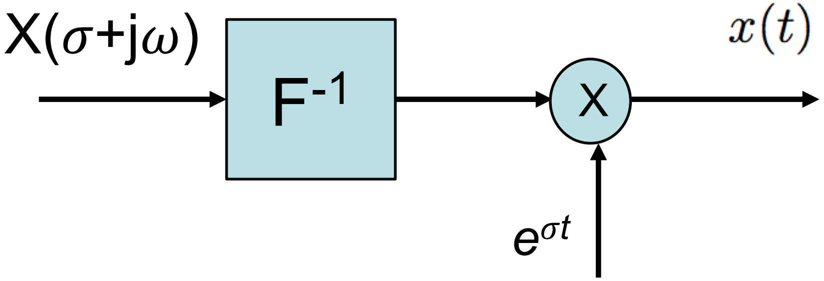
Legame con Fourier
e regola di inversione

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$



ottengo un effetto smorzamento



$$x(t) = \frac{e^{st}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

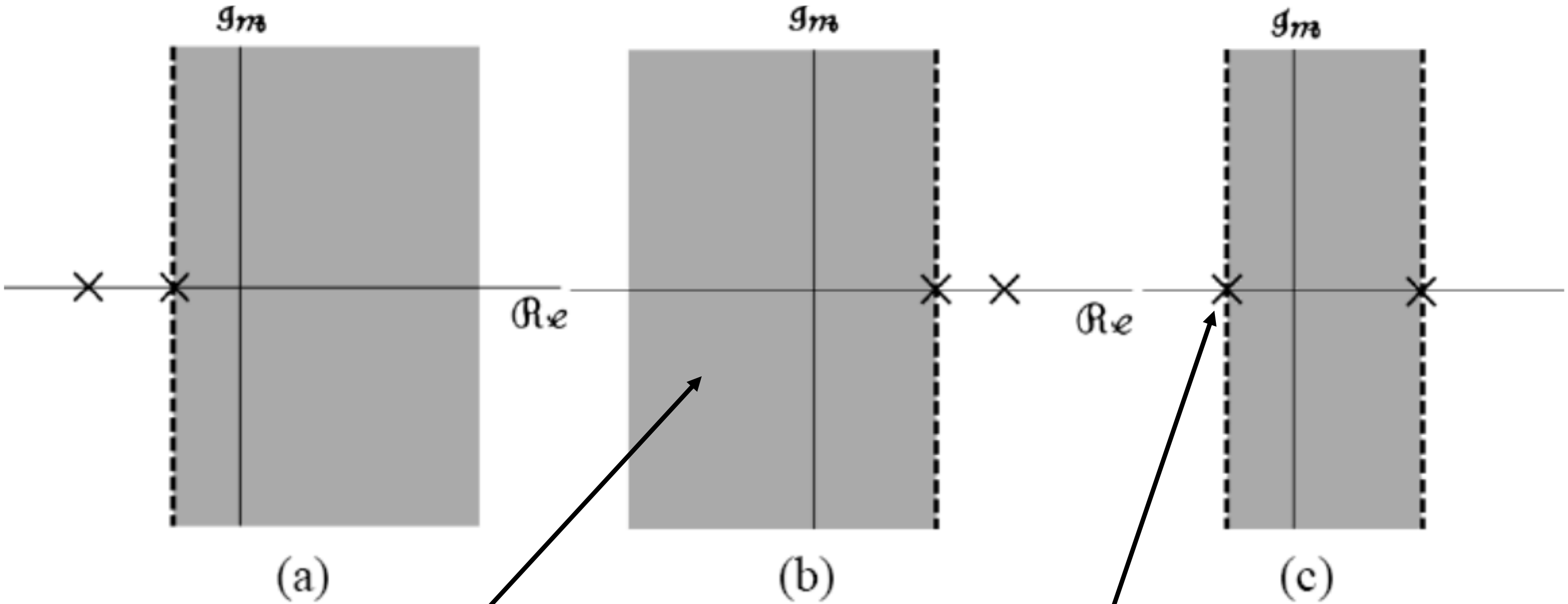
ma in realtà l'antitrasformata è molto più flessibile

Regioni di convergenza
trend generale

segnali causali

segnali anticausali

segnali misti



nella ROC la trasformata è una funzione analitica

poli = punti in cui l'espressione analitica della trasformata diverge

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) **l'esponenziale complesso** $s(t) = e^{s_0 t}\, 1(t)$

b) l'esponenziale **anticausale** $s(t) = -e^{s_0 t}\, 1(-t)$

c) la **combinazione** lineare $s(t) = e^{s_1 t}\, 1(t) + e^{s_2 t}\, 1(-t)$

Proprietà della trasformata (bilatera) di Laplace

Linearità
della trasformata di Laplace

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \quad \Longrightarrow \quad Z(s) = \alpha X(s) + \beta Y(s)$$

$$\cancel{\boxed{\Gamma_z = \Gamma_x \cap \Gamma_x}}$$

$$\Gamma_z \supset \Gamma_x \cap \Gamma_x$$

Ribaltamento e coniugio

nella trasformata di Laplace

$$y(t) = x(-t) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-(-s)u}du$$

$$= \boxed{X(-s)} \qquad \boxed{\Gamma_y = -\Gamma_x}$$

$$y(t) = x^*(t) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-st}dt$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-s^*t}dt\right)^*$$

$$= \boxed{X^*(s^*)} \qquad \boxed{\Gamma_y = \Gamma_x^* = \Gamma_x}$$

Scala

$$y(t) = x(t/a) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t/a) e^{-st} dt$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-(as)u} du$$

$$= \boxed{aX(as)} \qquad \boxed{\Gamma_y = \Gamma_x / a}$$

Traslazione nel tempo

induce una modulazione

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-s(u + t_0)} du$$

$$= \boxed{X(s) e^{-st_0}} \qquad \boxed{\Gamma_y = \Gamma_x}$$

Modulazione nel tempo

induce una traslazione nel dominio di Laplace

$$y(t) = x(t)\, e^{s_0 t} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{s_0 t} e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(s-s_0)t} dt$$

$$= \boxed{X(s - s_0)} \qquad \boxed{\Gamma_y = \Gamma_x + s_0}$$

Derivazione in s

proprietà della trasformata di Laplace

$$\boxed{y(t) = tx(t) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = -X'(s)} \quad \boxed{\Gamma_y = \Gamma_x}$$

$$\begin{aligned} X'(s) &= \frac{d}{ds}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-tx(t)]e^{-st}dt \end{aligned}$$

Derivazione in t

$$\boxed{y(t) = x'(t) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = sX(s) \qquad \Gamma_y \supset \Gamma_x}$$

può cancellare fattori 1/s

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds\right)$$
$$= \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st}ds$$

Convoluzione

induce un prodotto nel dominio di Laplace

$$z(t) = x * y(t) \quad \Longrightarrow \quad Z(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du \right) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t-u)e^{-st} dt \right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)Y(s)e^{-su} du$$

$$= \boxed{X(s)Y(s)} \qquad \boxed{\Gamma_z \supset \Gamma_x \cap \Gamma_y}$$

PS: integrale nel tempo

$$y(t) = x * 1(t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Y(s) = \frac{X(s)}{s}}$$

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) la **sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$
b) la sinusoide $s(t) = \sin(\omega_0 t)\, 1(t)$
c) Il **gradino** $s(t) = 1(t)$
d) il **rettangolo** $s(t) = \mathrm{rect}(t)$
e) l'**impulso** $s(t) = A\, \delta(t)$
f) l'**impulso** traslato $s(t) = A\, \delta(t-t_0)$
g) i segnali $s(t) = t^k e^{s_0 t}\, 1(t)$, sfruttando la derivazione in s
h) Le derivate dell'impulso $s(t) = \delta^{(k)}(t)$

Trasformate di Laplace razionali

Funzioni razionali

in s

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}$$

Versione **impropria** m≥n mappata in versione **propria**

$$H(s) = q(s) + \frac{r(s)}{a(s)}$$

$$= q_0 + q_1 s + \ldots + q_{m-n} s^{m-n}$$

$$+ \frac{r_0 + r_1 s + r_2 s^2 + \ldots + r_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}$$

quoziente

delta e le sue derivate

resto

funzione razionale propria

Funzioni razionali proprie

ovvero con m<n

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}$$

Versione **a poli e zeri** $$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)}$$

residuo $$R_i = \lim_{s \to p_i} H(s)(s - p_i)$$

Con poli semplici (tutti distinti)

$$H(s) = \frac{R_1}{(s - p_1)} + \frac{R_2}{(s - p_2)} + \ldots + \frac{R_n}{(s - p_n)}$$

Versione (generale) a poli multipli

residui

$$H(s) = K\frac{\prod_i (s-z_i)}{\prod_j (s-p_j)^{\mu_j}} = \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} \frac{R_{i,j}}{(s-p_j)^i}$$

molteplicità

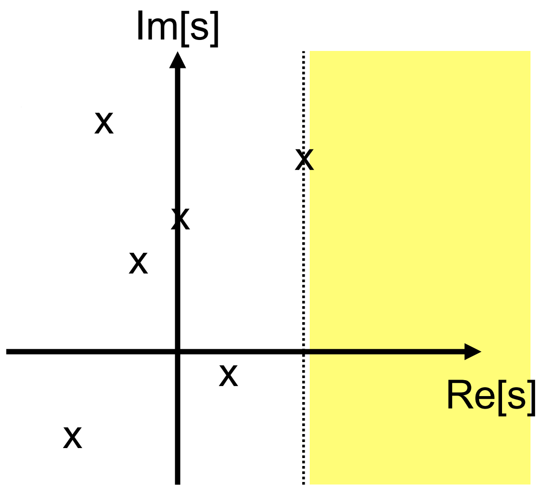
$$R_{\mu_j,j} = \lim_{s\to p_j} H(s)(s-p_j)^{\mu_j}$$

$$R_{\mu_j-1,j} = \lim_{s\to p_j} \frac{d[H(s)(s-p_j)^{\mu_j}]}{ds}$$

$$R_{\mu_j-k,j} = \frac{1}{k!}\lim_{s\to p_j} \frac{d^k[H(s)(s-p_j)^{\mu_j}]}{ds^k}$$

Antitrasformata causale

$$H(s) = K\frac{\prod_i (s-z_i)}{\prod_j (s-p_j)^{\mu_j}} = \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} \frac{R_{i,j}}{(s-p_j)^i}$$



Laplace

$$h(t) = \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} R_{i,j} \, \frac{t^{i-1} e^{p_j t} 1(t)}{(i-1)!}$$

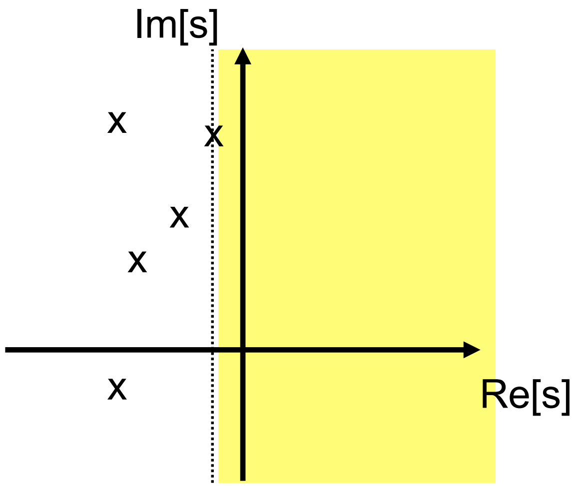
BIBO stabilità delle funzioni razionali

Una trasformata di Laplace H(s) espressa da una funzione razionale fratta **propria (m<n)** corrisponde ad una risposta impulsiva h(t) **BIBO stabile se e solo se** tutti i poli soddisfano **Re[p_i]<0**

Dimostrazione BIBO stabilità → Re[p_i]<0

Sfruttiamo il fatto che h(t) è assolutamente integrabile per mostrare l'esistenza della trasformata di Fourier. Pertanto l'asse immaginario è incluso nella regione di convergenza e i poli hanno necessariamente parte reale negativa

$$
\begin{aligned}
|H(j\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \underbrace{\left|e^{-j\omega t}\right|}_{1} dt \\
&< \infty
\end{aligned}
$$



BIBO stabilità delle funzioni razionali

Una trasformata di Laplace H(s) espressa da una funzione razionale fratta **propria (m<n)** corrisponde ad una risposta impulsiva h(t) **BIBO stabile se e solo se** tutti i poli soddisfano **$Re[p_i]<0$**

Dimostrazione $Re[p_i]<0 \rightarrow$ BIBO stabilità

Sfruttiamo $Re[p_i]<0$ per mostrare che h(t) è assolutamente integrabile

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} |R_{i,j}| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{i-1}|e^{p_j t}| 1(t)}{(i-1)!}\, dt$$

$$= \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} |R_{i,j}| \int_0^{\infty} \frac{t^{i-1} e^{\Re[p_j] t}}{(i-1)!}\, dt$$

$$= \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} \frac{|R_{i,j}|}{(0-\Re[p_j])^i} < \infty$$

Es 1

Calcolare la anti-trasformata di Laplace causale per le seguenti funzioni razionali fratte

a) $H(s) = (s-3)/(s+2)$
b) $H(s) = 1/(s^3+s^2-6s)$
c) $H(s) = (4s-1)/(2s^3-2s^2)$

Trasformata unilatera di Laplace

La trasformata unilatera di Laplace

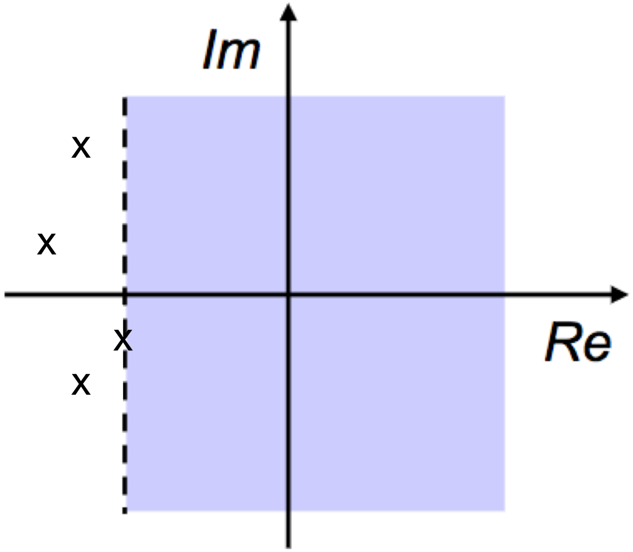
generalizzazione per segnali causali

continuo

$$x(t)$$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

complesso $s = \sigma + j\omega$



ROC è sempre un semipiano aperto a destra limitato da un polo, non serve specificarla

Proprietà della trasformata unilatera

quelle che non variano

Linearità	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\Longrightarrow$	$\alpha X(s) + \beta Y(s)$
~~Ribaltamento~~			
Coniugio	$x^*(t)$	$\Longrightarrow$	$X^*(s^*)$
Traslazione con t_0>0, x(t) causale	$x(t-t_0)$	$\Longrightarrow$	$X(s)e^{-st_0}$
Modulazione	$x(t)\, e^{s_0 t}$	$\Longrightarrow$	$X(s-s_0)$
Scala	$x(t/a)$	$\Longrightarrow$	$aX(as)$
Derivazione in s	$tx(t)$	$\Longrightarrow$	$-X'(s)$
Convoluzione segnali causali	$x * y(t)$	$\Longrightarrow$	$X(s)Y(s)$

Derivazione in t

proprietà della trasformata unilatera di Laplace

$$
\begin{aligned}
y(t) = x'(t) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st}dt \\
&= x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-se^{-st})dt \\
&= \left(\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st}\right) - x(0^-) + sX(s) \\
&= \boxed{sX(s) - x(0^-)}
\end{aligned}
$$

$$x''(t) \quad \Longrightarrow \quad s\Big(sX(s) - x(0^-)\Big) - x'(0^-)$$

$$x'''(t) \quad \Longrightarrow \quad s^3X(s) - s^2x(0^-) - sx'(0^-) - x''(0^-)$$

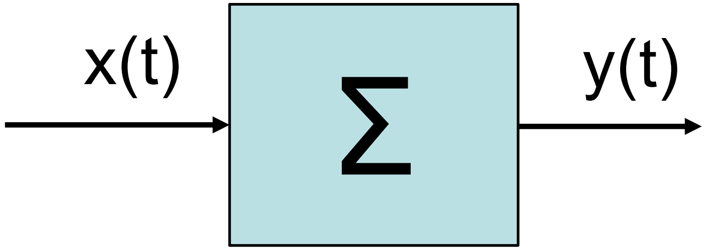
$$\boxed{x^{(k)}(t) \quad \Longrightarrow \quad s^kX(s) - s^{k-1}x(0^-) - s^{k-2}x^{(1)}(0^-) - \ldots - x^{(k-1)}(0^-)}$$

Soluzione di equazioni differenziali

tramite la trasformata unilatera di Laplace

Sistemi descritti da eq. differenziali

tipici della fisica



Equazione differenziale

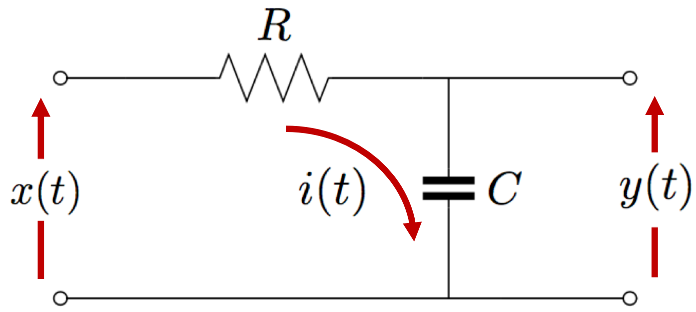
$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y''(t) + \ldots + a^n y^{(n)}(t)$$
$$= b_0 x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) + \ldots + b^m x^{(m)}(t)$$

Ingresso $x(t), t > 0^-$

Condizioni iniziali (stato del Sistema) $y(0^-), y'(0^-), \ldots, y^{(n-1)}(0^-)$

Il filtro RC

Esempio di equazioni differenziali



$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$

$$y'(t) = \frac{i(t)}{C}$$

Equazione differenziale

$$y(t) + RC\,y'(t) = x(t)$$

Soluzione tramite trasformata di Laplace

per sistemi descritti da equazioni differenziali

Equazione differenziale

$$\sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)$$

Trasformata unilatera di Laplace

$$\sum_{k=0}^{m} b_k s^k X(s) - \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{\ell=0}^{k-1} x^{(\ell)}(0^-) s^{k-1-\ell}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} a_i y^{(j)}(0^-) s^{i-1-j}$$

Soluzione tramite trasformata di Laplace

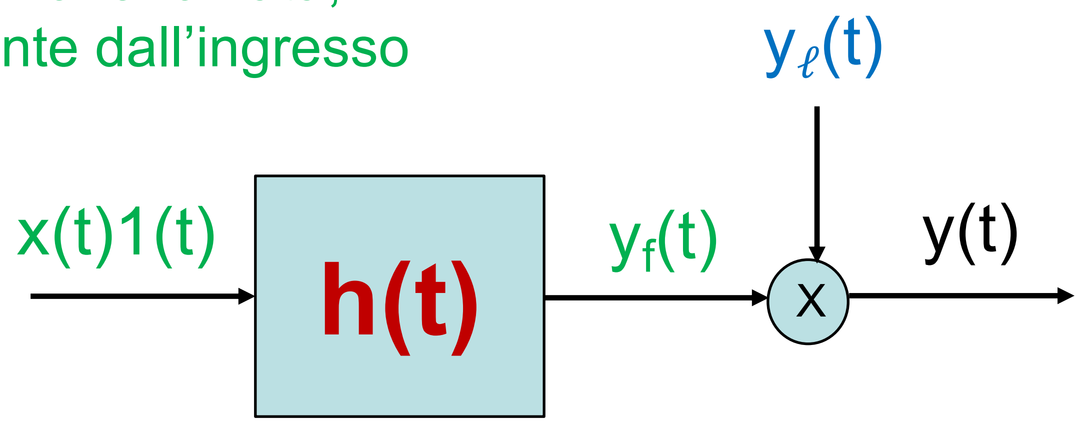
per sistemi descritti da equazioni differenziali

$$Y(s) = \boxed{\boxed{\frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}} X(s)} + \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i y^{(j)}(0^-) s^{i-1-j} - \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=0}^{k-1} b_k x^{(\ell)}(0^-) s^{k-1-\ell}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}}$$

funzione di trasferimento H(s)

evoluzione libera, dipendente dalle condizioni iniziali (uscita con ingresso nullo x(t)=0)

evoluzione forzata, dipendente dall'ingresso



BIBO stabilità

per sistemi descritti da equazioni differenziali

BIBO stabile ↔ m≤n e poli di H(s) con Re[p_i]<0

$$Y(s) = \boxed{\boxed{\frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}} X(s)} + \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i y^{(j)}(0^-) s^{i-1-j} - \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=0}^{k-1} b_k x^{(\ell)}(0^-) s^{k-1-\ell}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}}$$

con m≤n e poli di H(s) con Re[p_i]<0 il filtro è BIBO stabile

con m≤n frazione propria e con poli Re[p_i]<0 l’evoluzione libera non diverge

andamento per t≫0

si spegne per t≫0

$$Y(s) = \boxed{\boxed{\frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}} X(s)} + \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i y^{(j)}(0^-) s^{i-1-j} - \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=0}^{k-1} b_k x^{(\ell)}(0^-) s^{k-1-\ell}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}}$$

per t≫0 diventa
convoluzione senza 1(t)

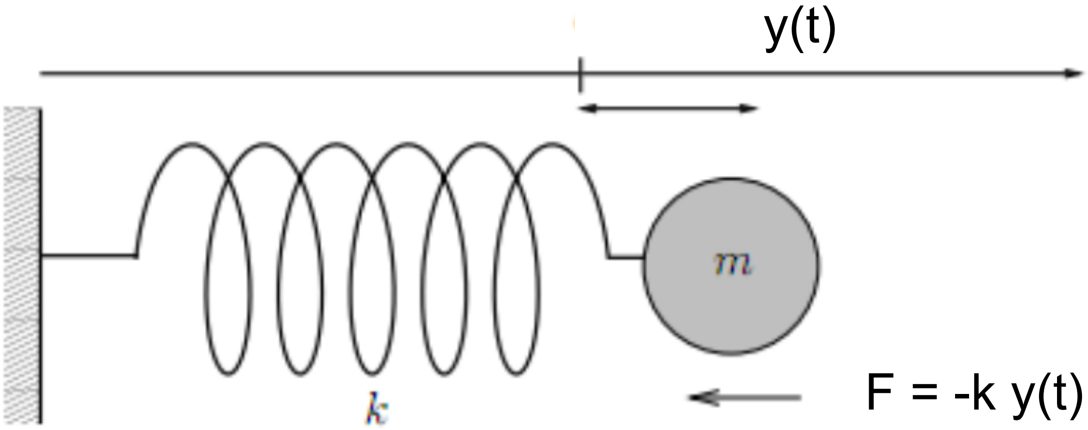
si spegne per t≫0
perchè poli con Re(p_i)<0 corrispondono
a esponenziali $t^k e^{p_i t}$ 1(t)

Es 1

Calcolare l'uscita di un **filtro RC** con ingresso x(t)=A e condizioni iniziali $y(0^-)=v_0$

Es 2

Calcolare l'uscita di un **sistema massa-molla** descritto dall'equazione **x(t) = k y(t)+m y''(t)** con ingresso $x(t)=F_0 \cos(\omega_0 t)$ e condizioni iniziali $y(0^-)=y_0$ e $y'(0^-)=v_0$



Es 3 *Prova di Autovalutazione dell' 1 Giugno 2018*

[6 punti] Sia dato il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = x'(t) - 3x(t)$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $H(s)$
2. Dire se il sistema è BIBO stabile
3. Determinare la risposta forzata con $x(t) = 1(t)$
4. Dato $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot 1(t)$, e con condizioni iniziali nulle sull'uscita $y(t)$, determinare il valore di f_0 (reale positivo) per cui a transitorio esaurito l'ampiezza di oscillazione sia ridotta ad $\frac{1}{5}$ di quella del segnale di ingresso

La trasformata Z (bilatera)

Per segnali a tempo discreto

La trasformata Z

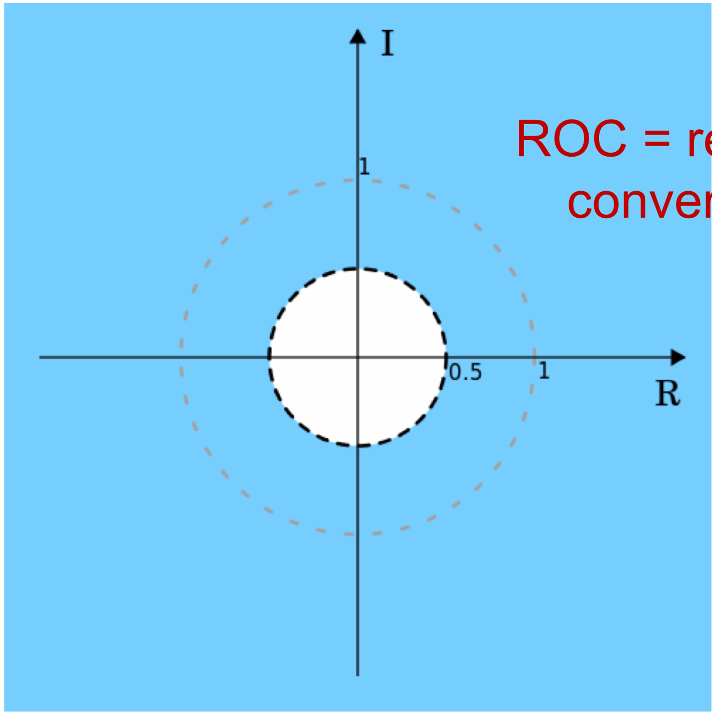
generalizzazione della trasformata di Fourier

discreto

$x(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

complesso $z = re^{j\theta}$



ROC = regione di convergenza

$X(e^{j\theta})$ è la trasformata di Fourier

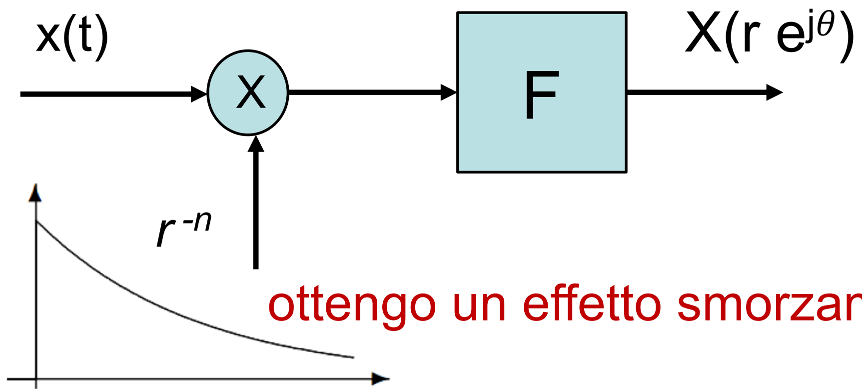
esiste se la ROC contiene il cerchio unitario

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

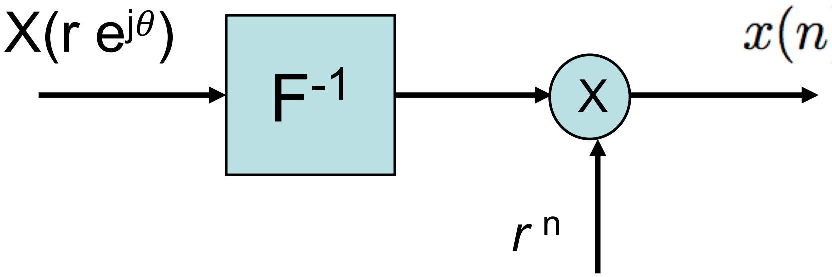
Legame con Fourier
e regola di inversione

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$z = re^{j\theta}$$



ottengo un effetto smorzamento



$$x(n) = \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(re^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \oint_r X(z) z^{n-1} dz$$

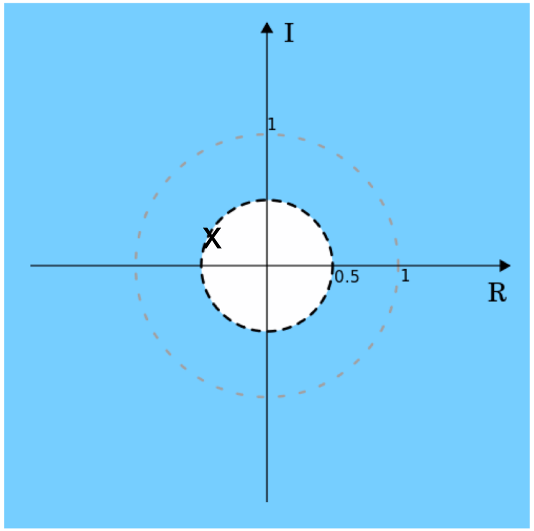
ma in realtà l’antitrasformata è molto più flessibile

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

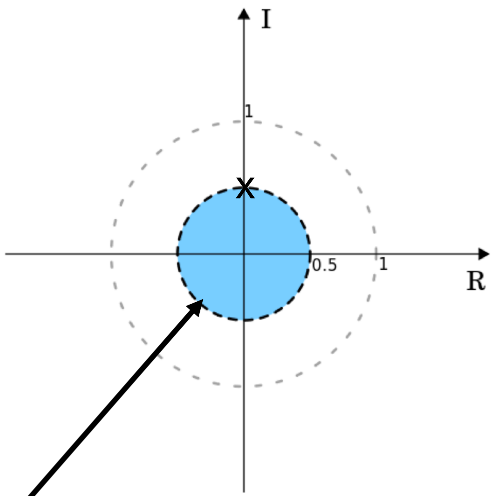
Regioni di convergenza

trend generale

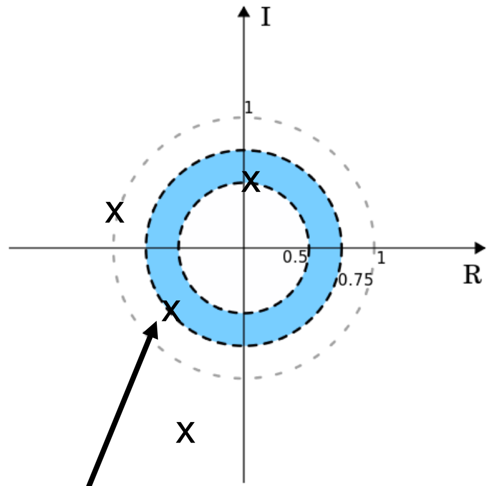
segnali causali



segnali anticausali



segnali misti



nella ROC la trasformata è una funzione analitica

poli = punti in cui l'espressione analitica della trasformata diverge

Proprietà della trasformata Z

le dimostrazioni sono sempre le stesse

Linearità $\alpha x(n) + \beta y(n) \Longrightarrow \alpha X(z) + \beta Y(z)$

Traslazione $x(n - n_0) \Longrightarrow X(z)z^{-n_0}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-(n+n_0)}$$

Modulazione $p_0^n x(n) \Longrightarrow X(z/p_0)$

Derivazione in z $nx(n) \Longrightarrow -zX'(z)$

-n z^{-n-1}

$$X'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{dz^{-n}}{dz} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n}$$

Convoluzione $x * y(n) \Longrightarrow X(z)Y(z)$

Es 1

Calcolare la trasformata Z per i seguenti segnali

a) **l'esponenziale complesso** $x(n) = p_0^n \, 1_0(n)$

b) l'esponenziale **anticausale** $x(n) = p_0^n \, 1_0(-n)$

c) la sinusoide $x(n) = \cos(\theta n) \, 1_0(n)$

d) la sinusoide $x(n) = \sin(\theta n) \, 1_0(n)$

Es 2 (fratti semplici)

Calcolare la trasformata Z per i seguenti segnali

a) $\mathbf{x_0(n)} = -p_0^{n+1} \, 1_0(n)$

b) $\mathbf{x_1(n)} = (n+1) \, p_0^{n+2} \, 1_0(n)$

c) $\mathbf{x_2(n)} = -\frac{1}{2} (n+1) (n+2) \, p_0^{n+3} \, 1_0(n)$

d) $x_k(n) = (-1)^{k+1} (n+1) (n+2) \ldots (n+k) \, p_0^{n+1+k} \, 1_0(n) / k!$

La trasformata Z unilatera

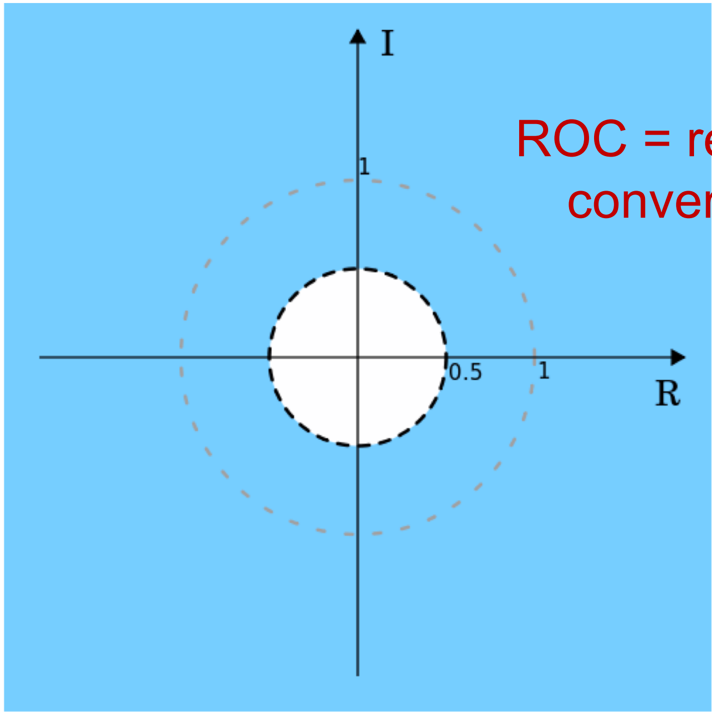
per segnali causali

discreto

$$x(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

complesso $z = re^{j\theta}$



ROC = regione di convergenza

ROC è sempre una regione che parte da un cerchio (limitato dalla presenza di un polo) e si estende all'infinito

Proprietà della trasformata Z unilatera

le dimostrazioni sono sempre le stesse

Linearità $$\alpha x(n) + \beta y(n) \implies \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

Traslazione $$x(n-n_0) \implies X(z)z^{-n_0} + \underbrace{\sum_{m=-n_0}^{-1} x(m)z^{-(m+n_0)}}_{x(-n_0)+x(-(n_0-1))z^{-1}+\ldots+x(-1)z^{-(n_0-1)}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n} = \sum_{m=-n_0}^{\infty} x(m)z^{-(m+n_0)}}$$

Modulazione $$p_0^n x(n) \implies X(z/p_0)$$

Derivazione in z $$nx(n) \implies -zX'(z)$$

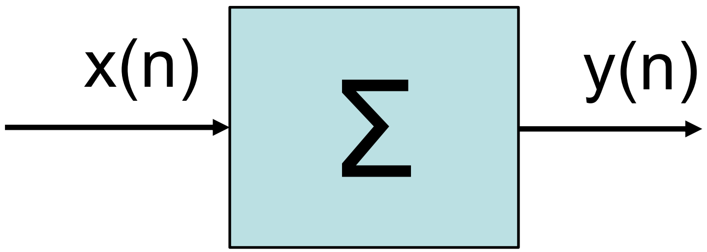
Convoluzione $$x * y(n) \implies X(z)Y(z)$$

Soluzione di equazioni alle differenze

tramite la trasformata Z unilatera

Sistemi descritti da eq. alle differenze

ad es, versione discretizzata delle differenziali



Equazione alle differenze

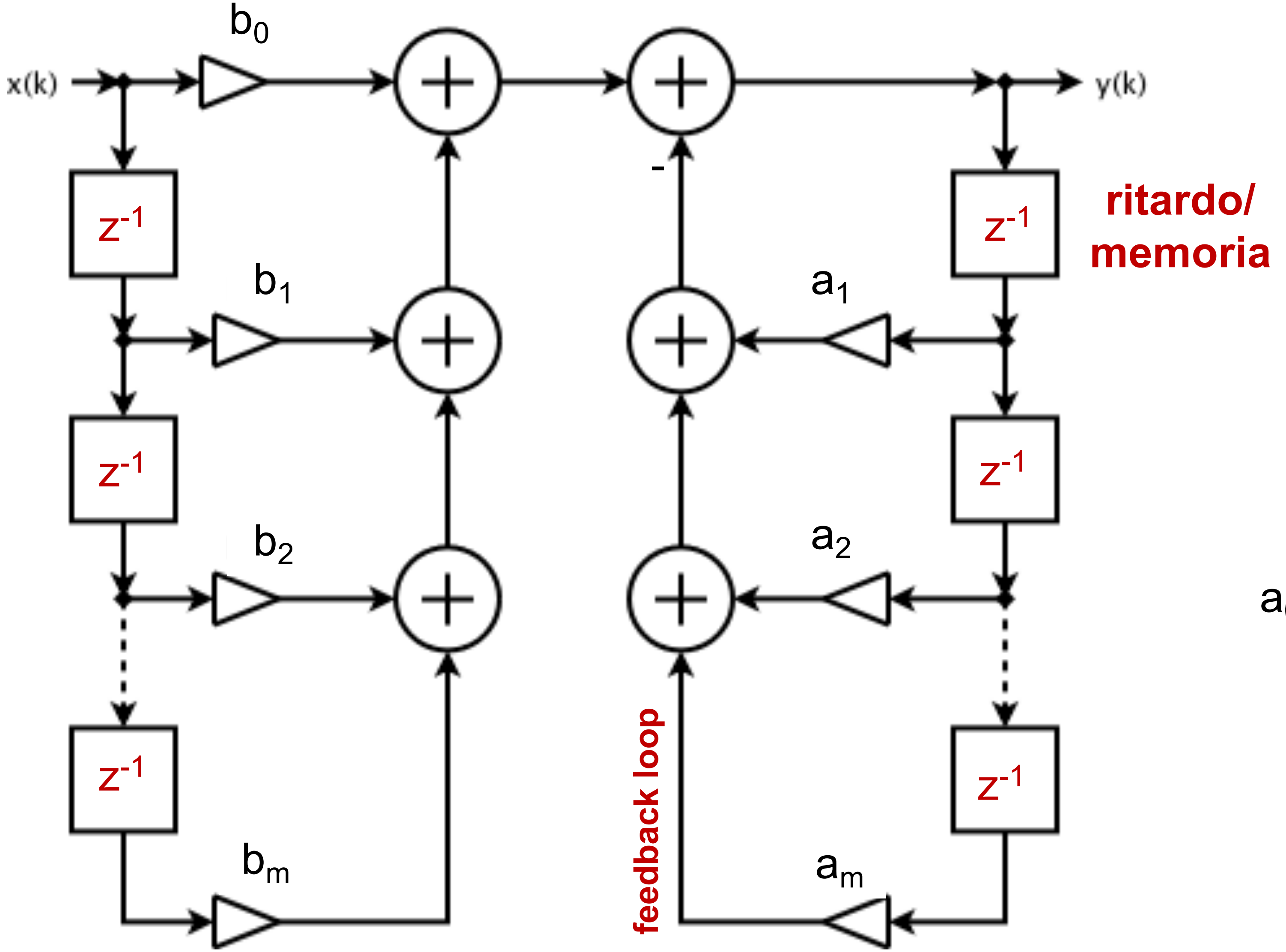
$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n)$$
$$= b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \ldots + b_m x(k-m)$$

Ingresso $x(n), n \geq -m$

Condizioni iniziali (stato del Sistema) $y(-k), \ldots, y(-2), y(-1)$

Architettura di sistema

modello ARMA = auto-regressive moving-average



$a_0=1$

FIR = finite impulse response

IIR = infinite impulse response

Soluzione tramite trasformata Z

per sistemi descritti da equazioni alle differenze

Equazione alle differenze

$$\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell\, x(k-\ell) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k-i)$$

Trasformata Z unilatera

$$\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell z^{-\ell} X(z) + \sum_{\ell=0}^{m} \sum_{j=-\ell}^{-1} b_\ell x(j) z^{-(j+\ell)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i} Y(z) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=-i}^{-1} a_i x(k) z^{-(k+i)}$$

Soluzione tramite trasformata di Laplace

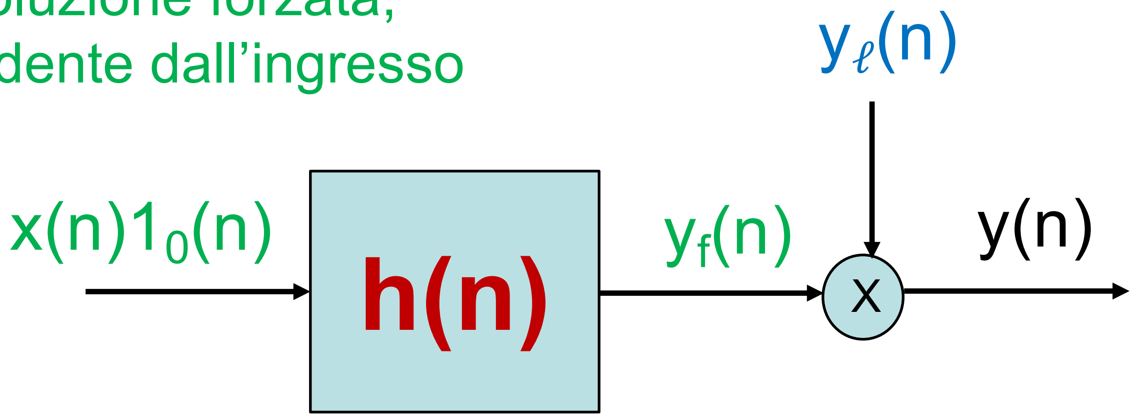
per sistemi descritti da equazioni differenziali

$$Y(z) = \boxed{\frac{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell z^{-\ell}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}} X(z) + \boxed{\frac{\sum_{\ell=0}^{m} \sum_{j=-\ell}^{-1} b_\ell x(j) z^{-(j+\ell)} - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=-i}^{-1} a_i x(k) z^{-(k+i)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}}$$

funzione di trasferimento H(z)

evoluzione libera, dipendente dalle condizioni iniziali (uscita con ingresso nullo x(n)=0)

evoluzione forzata, dipendente dall'ingresso



BIBO stabilità

per sistemi descritti da equazioni alle differenze

BIBO stabile ↔ poli di H(z) con |p_i|<1

$$Y(z) = \boxed{\boxed{\frac{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell z^{-\ell}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}} X(z)} + \boxed{\frac{\sum_{\ell=0}^{m} \sum_{j=-\ell}^{-1} b_\ell x(j) z^{-(j+\ell)} - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=-i}^{-1} a_i x(k) z^{-(k+i)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}}$$

con poli di H(z) con |p_i|<1 il filtro è BIBO stabile

con poli |p_i|<1 (**la cui controparte nel tempo è p_0^k**) l'evoluzione libera non diverge

andamento per t≫0

si spegne per t≫0

$$Y(z) = \boxed{\boxed{\frac{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell z^{-\ell}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}} X(z)} + \boxed{\frac{\sum_{\ell=0}^{m}\sum_{j=-\ell}^{-1} b_\ell x(j) z^{-(j+\ell)} - \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=-i}^{-1} a_i x(k) z^{-(k+i)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}}$$

per t≫0 diventa
convoluzione senza 1(n)

si spegne per t≫0
perchè poli con $|p_i|<1$ corrispondono a
esponenziali $p_i^k 1_0(t)$

Es 1

Calcolare l'evoluzione del sistema descritto dall'equazione

$$x(n) = y(n-2) + y(n-1) - 6\, y(n)$$

con $x(n) = A\, 1_0(n)$, $y(-1)=k_1$, $y(-2)=k_2$, e la risposta impulsiva $h(n)$

Es 2

Siano la risposta impulsiva e l'ingresso di un sistema definiti da

$$h(n) = (1+2n)\,(-1)^n\, 1_0(n) + \tfrac{1}{2}\,(-\tfrac{1}{2})^n\, 1_0(n)$$
$$x(n) = \tfrac{1}{3}\,(-\tfrac{1}{3})^n\, 1_0(n)$$

e le condizioni iniziali siano nulle. SI chiede di:

1) dire se il sistema è BIBO stabile e se è reale
2) identificare l'equazione alle differenze che lo regola
3) Identificare la risposta forzata e l'evoluzione libera