

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

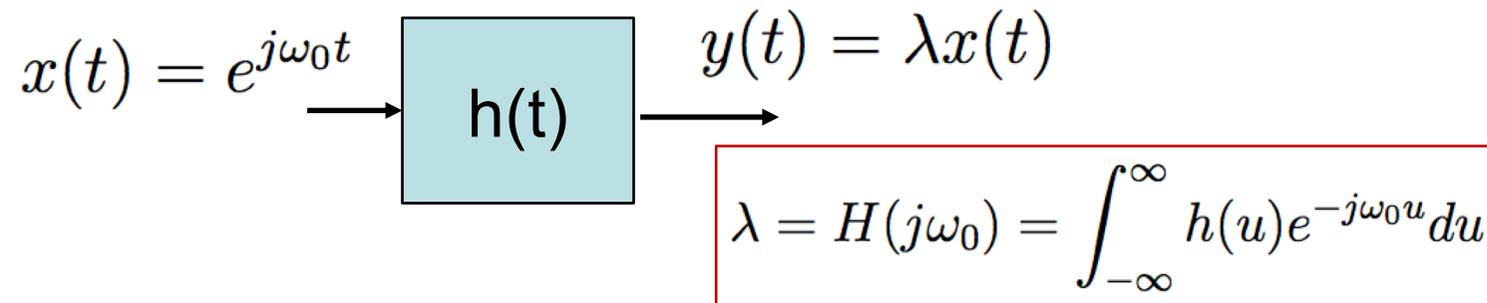
Segnali e Sistemi

(canale 2)

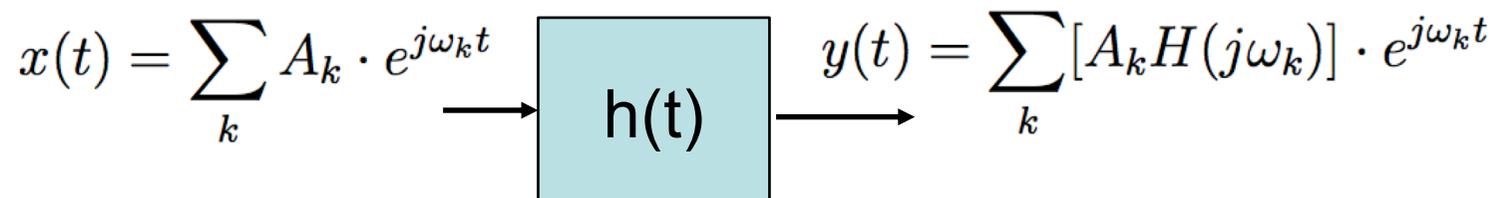
Laurea in Ing. Biomedica + Elettronica
Anno II, secondo semestre, A.A. 20/21

La serie di Fourier

Per segnali periodici



Si può studiare agevolmente l'azione di un filtro su una composizione di esponenziali complessi a fase lineare

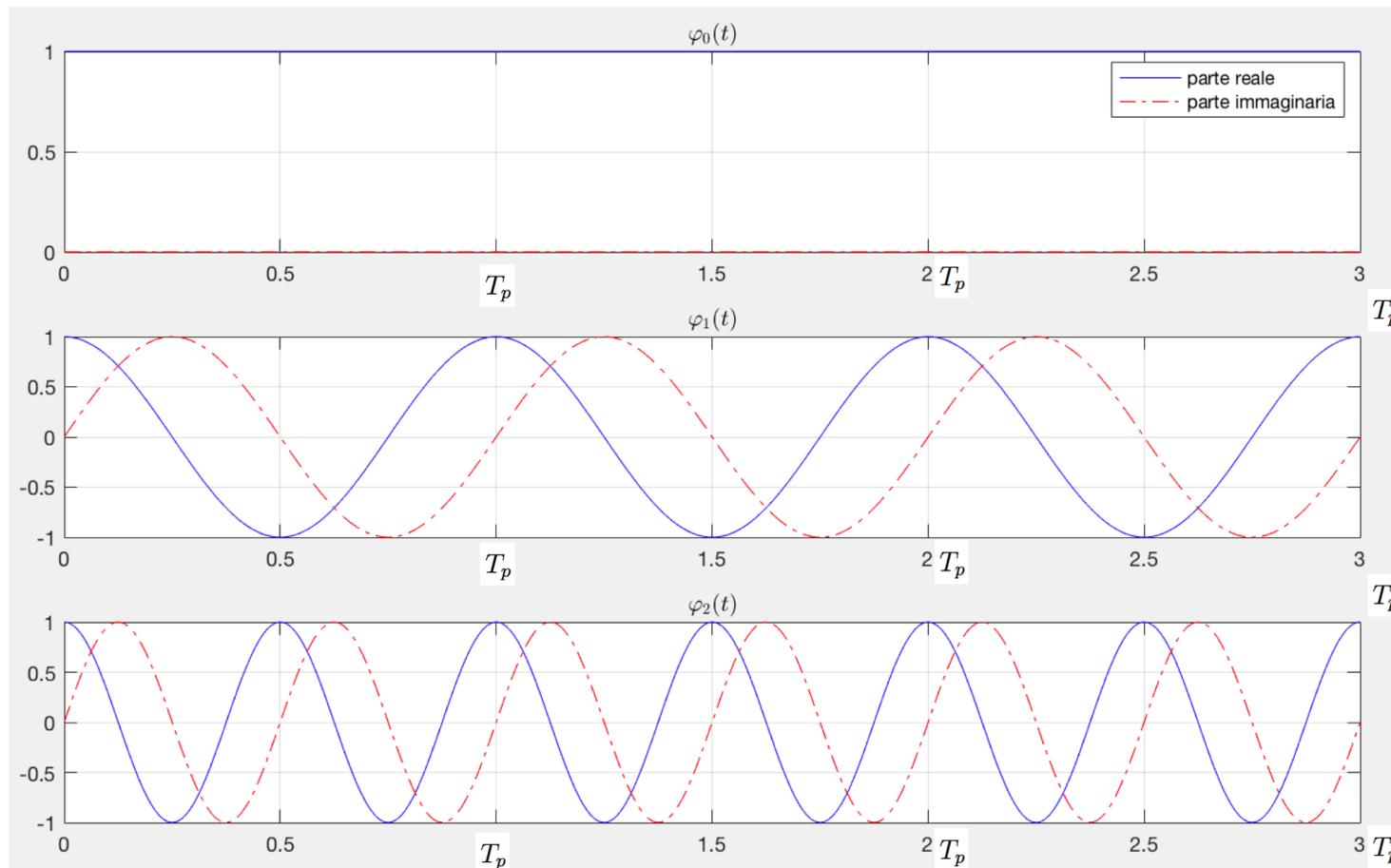




Composizione di **esponenziali**
in relazione armonica

$$\varphi_k(t) = e^{j\omega_0 kt} = e^{j2\pi k F t}$$

$$\omega_0 = 2\pi F$$



periodo

$$T_p(k) = \frac{1}{|k|F}$$

**periodo
comune**

$$T_p = \frac{1}{F}$$



cerchiamo di capire come esprimere un segnale periodico tramite combinazione di esponenziali complessi a fase lineare



Prodotto interno $\langle x, y \rangle :$

$$\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$$

spazio di Hilbert

Proprietà $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ coniugio

$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ linearità

$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \geq 0$ norma (nulla solo se x nullo)

Conseguenze

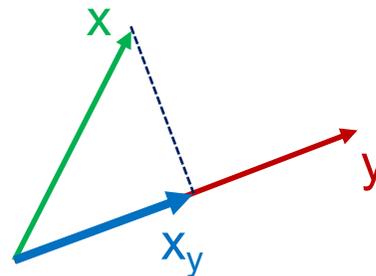
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ disuguaglianza triangolare

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ disuguaglianza di Cauchy-Schwartz



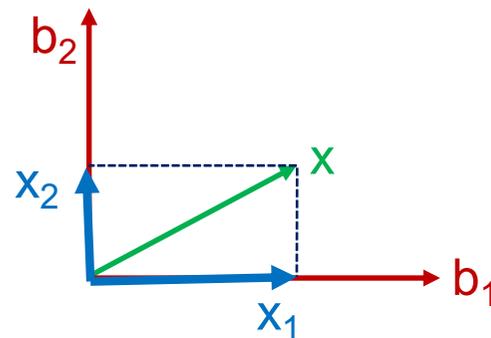
Prodotto interno $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i^*$

Proiezione lungo una direzione



$$x_y = \frac{y}{\|y\|} \left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = y \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$$

Scomposizione rispetto ad una base ortogonale $\langle b_i, b_{j \neq i} \rangle = 0$



$$x = \sum_i b_i \frac{\langle x, b_i \rangle}{\|b_i\|^2} x_i$$



Prodotto interno $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)y^*(t)dt$

Proiezione lungo una direzione

$$x_y = y \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \quad \Rightarrow \quad x_y(t) = y(t) \frac{\langle x(t), y(t) \rangle}{\|y(t)\|^2}$$

Scomposizione rispetto ad una base ortogonale $\langle b_i(t), b_{j \neq i}(t) \rangle = 0$

$$x = \sum_k b_k \underbrace{\frac{\langle x, b_k \rangle}{\|b_k\|^2}}_{x_k} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sum_k b_k(t) \underbrace{\frac{\langle x(t), b_k(t) \rangle}{\|b_k(t)\|^2}}_{x_k}$$



Base (esponenziali complessi a fase lineare)

$$b_k(t) = e^{j\omega_0 kt}, \quad T_p = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Ortogonalità

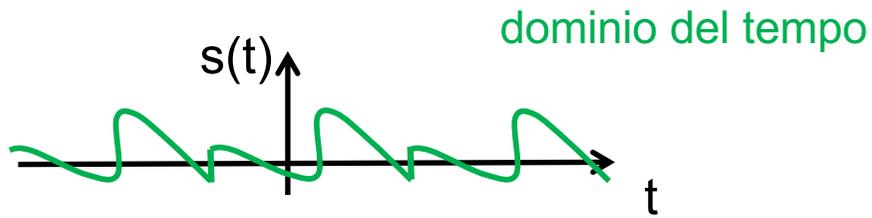
$$\langle b_i(t), b_\ell(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_p} \underbrace{e^{j\omega_0 it} e^{-j\omega_0 \ell t}}_{e^{j\omega_0(i-\ell)t}} dt = \begin{cases} T_p & i = \ell \\ 0 & i \neq \ell \end{cases}$$

Scomposizione $x(t) = \sum_k X_k \underbrace{e^{j\omega_0 kt}}_{b_k(t)}$:

$$X_k = \frac{\langle x(t), b_k(t) \rangle}{\|b_k(t)\|^2} = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$$



La serie di Fourier per segnali continui e periodici



segnale continuo
periodico

$$s(t) = s(t + T_p)$$

ricostruzione del segnale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$$

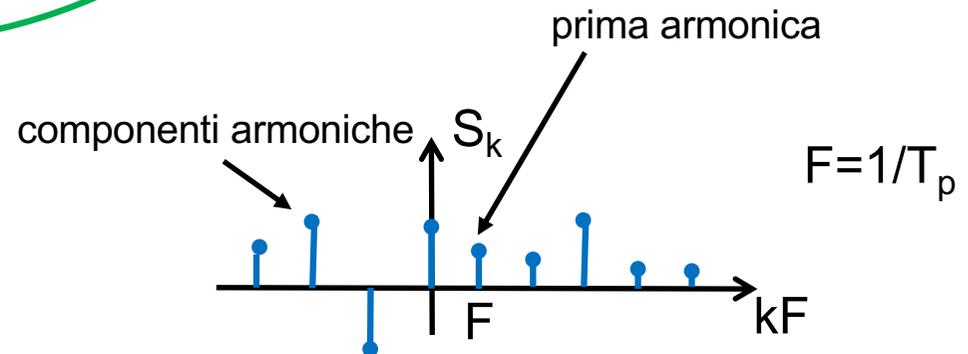
La serie di Fourier

proiezione su una base ortogonale

$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

coefficienti della
serie di Fourier

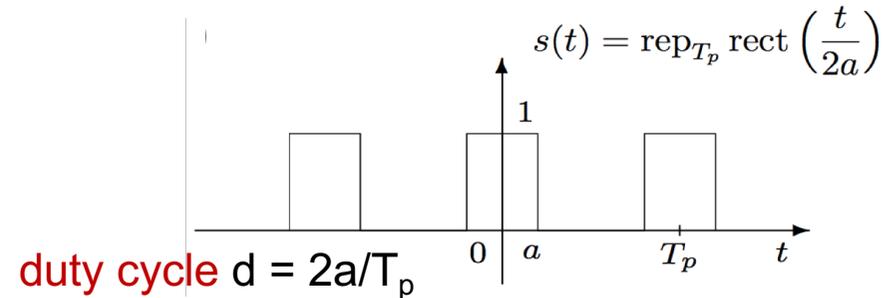
S_k



dominio della frequenza/pulsazione



$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{-a}^a s(t) e^{-j2\pi kt/T_p} dt$$
$$= \frac{1}{T_p} \frac{e^{-j2\pi kt/T_p} \Big|_{-a}^a}{-j2\pi k/T_p} = \frac{e^{j2\pi ka/T_p} - e^{-j2\pi ka/T_p}}{j2\pi k} = \frac{\sin(2\pi ka/T_p)}{\pi k}$$
$$= \frac{\sin(\pi kd)}{\pi k} = d \operatorname{sinc}(kd)$$



← valido anche per $k=0$, caso da trattare a se stante

sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra

$$s(t) = d \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(kd) e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$



Quali classi di segnali periodici ammettono di essere rappresentati tramite serie di Fourier? (ovvero tramite esponenziali complessi)

Ovvero per cui:

- i coefficienti di Fourier esistono
- la serie converge, e converge al segnale

condizioni di Dirichlet

Segnali che nel periodo:

- sono **assolutamente integrabili**
- hanno un numero finito di **discontinuità**, di valore finito
- hanno un numero finito di max e min

condizioni di Riesz-Fisher

Segnali che nel periodo:

- hanno **energia finita**

ma anche

- le **distribuzioni** (i delta)
- combinazioni lineari delle varie classi



Convergenza della serie di Fourier

convergenza in media quadratica

La convergenza della serie di Fourier **NON** è di tipo puntuale

La serie converge **in media quadratica** (teorema di Riesz-Fisher)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|s(t) - s_N(t)\| = 0$$

serie troncata

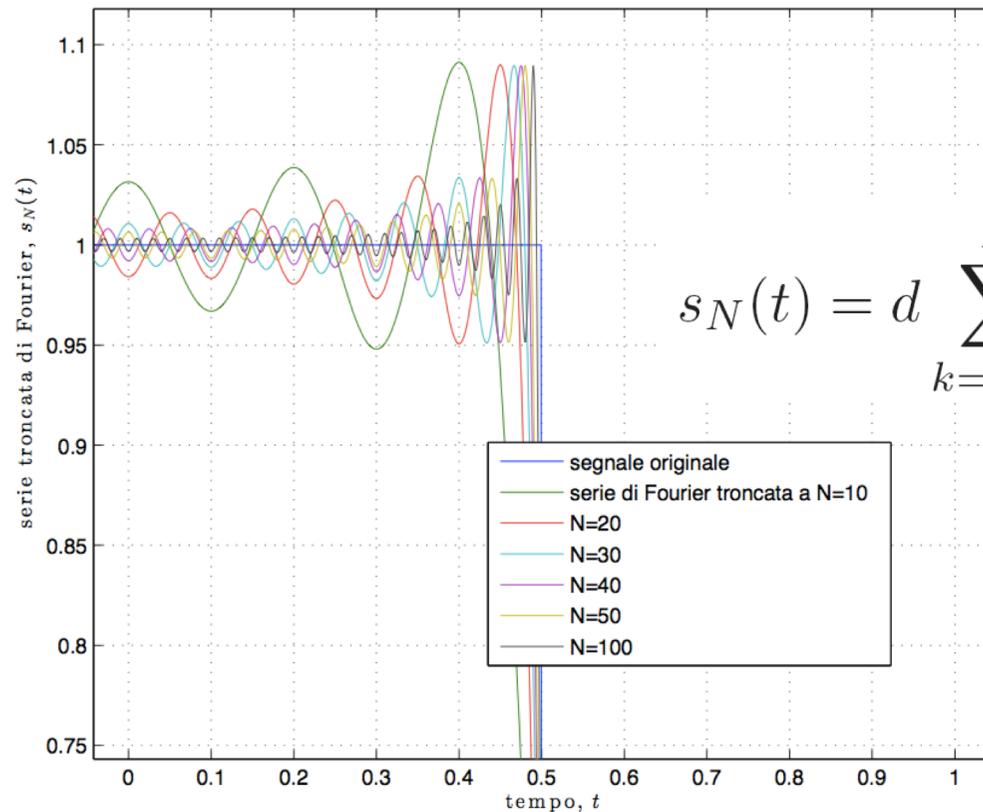
$$s_N(t) = \sum_{k=-N}^N S_k e^{jk\omega_0 t}$$



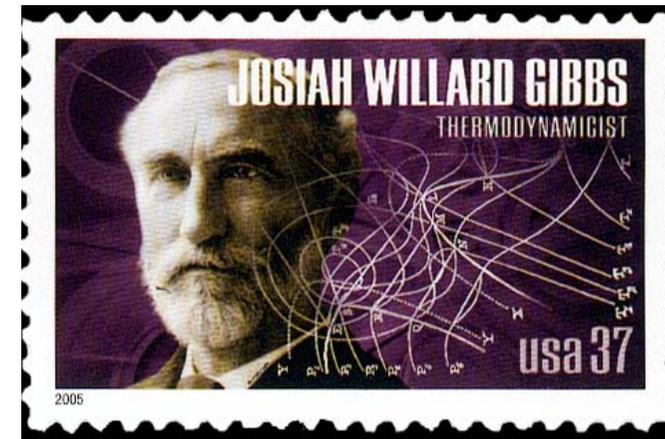
Il fenomeno di Gibbs

nella convergenza dell'onda quadra

fenomeno di Gibbs nello sviluppo in serie di Fourier di un'onda quadra avente periodo $T_p = 2$ e un duty cycle del 50% ($d = 0.5$)

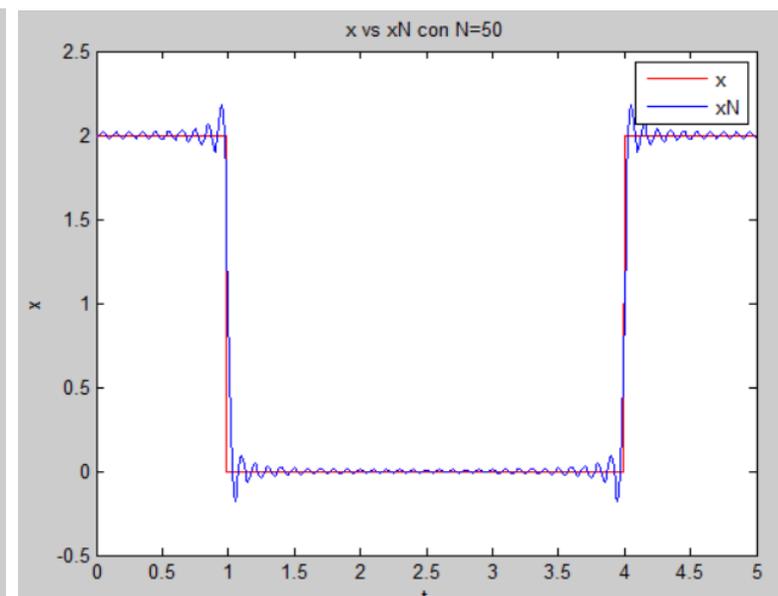
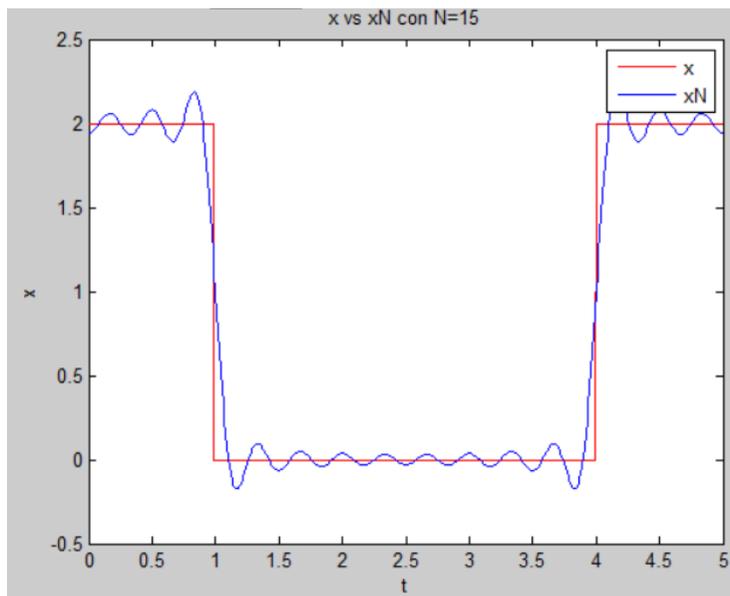
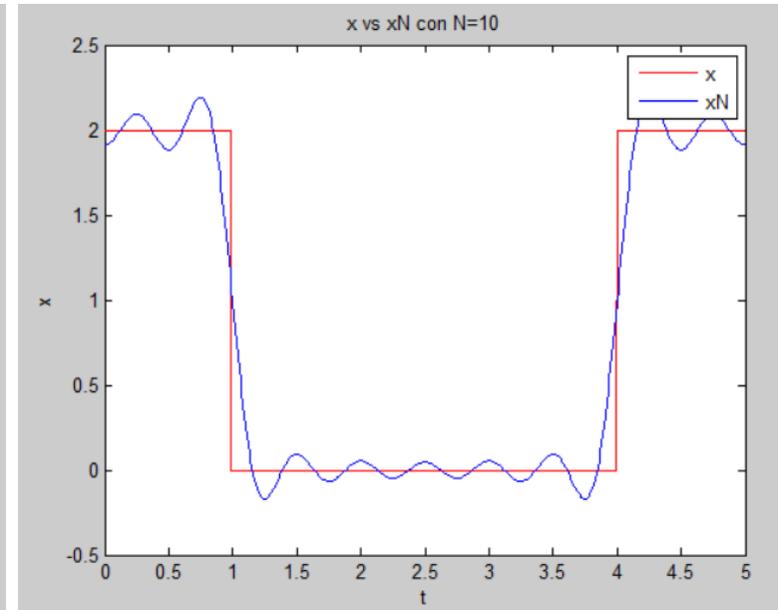
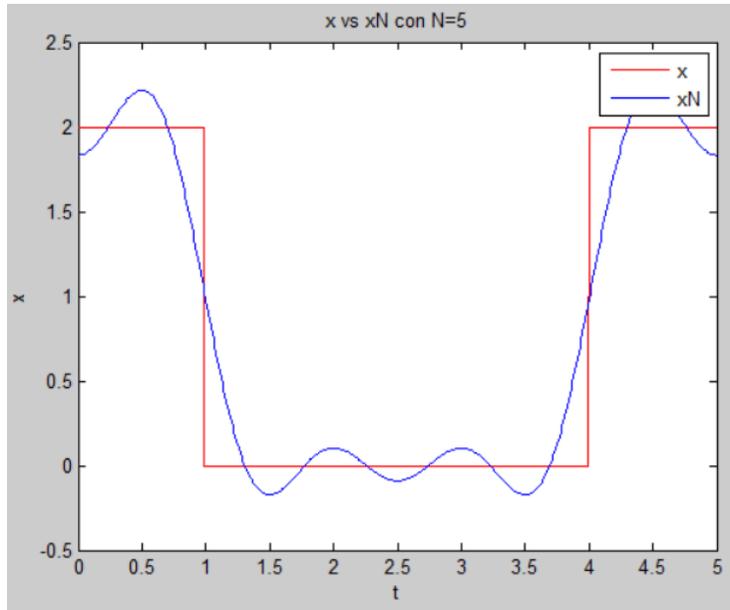


$$s_N(t) = d \sum_{k=-N}^N \text{sinc}(kd) e^{j2\pi kt/T_p}$$



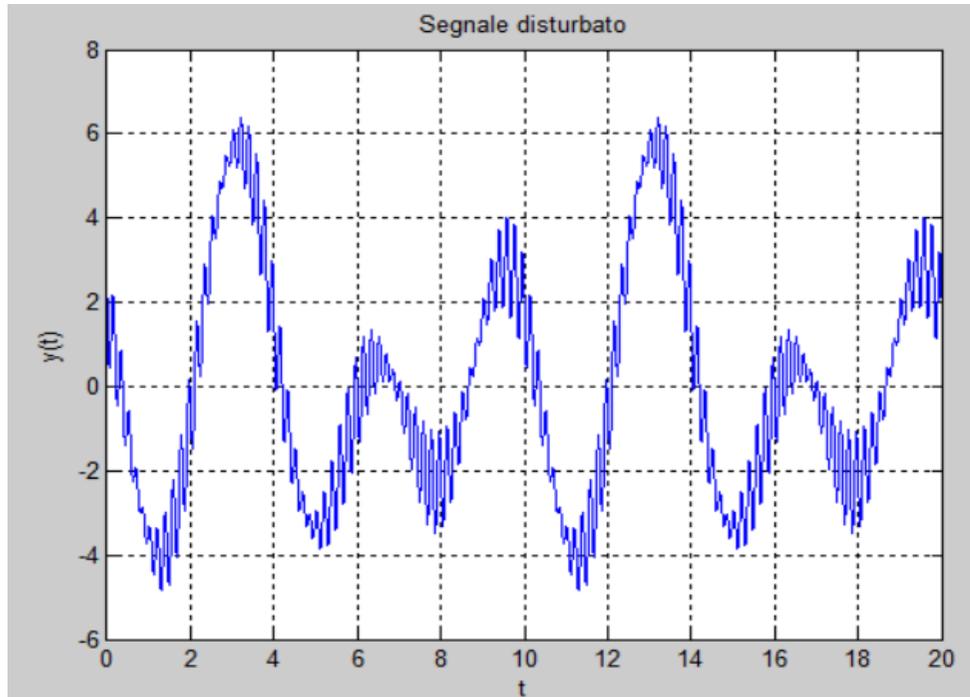


Ancora sul fenomeno di Gibbs con l'onda quadra

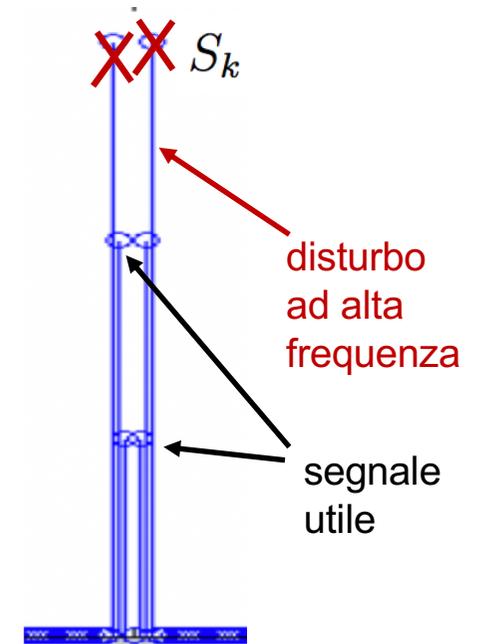


Esempio di applicazione

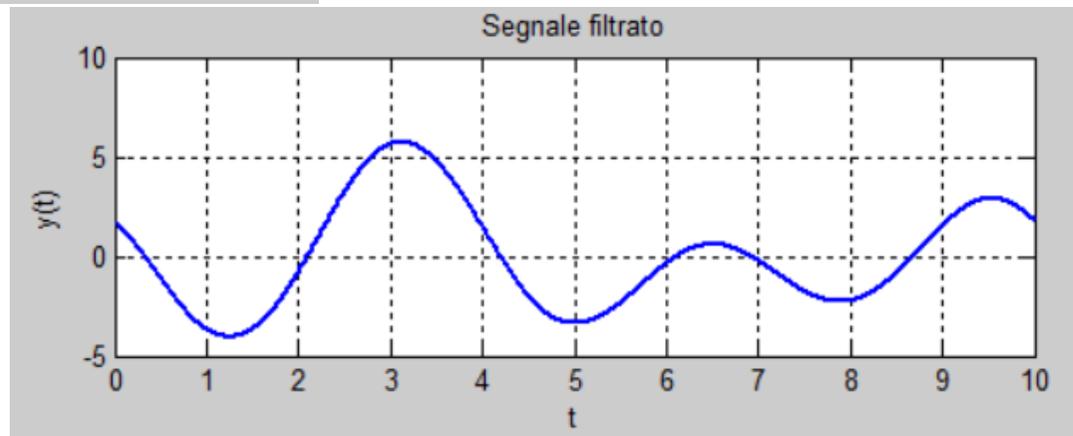
manipolazione selettiva delle armoniche (filtro selettivo)



Segnale
periodico di
periodo 10 a cui
è stato
sovrapposto un
disturbo «ad
alta frequenza»



Cancello le
armoniche
a frequenza
elevata



Proprietà della serie di Fourier



$$s(t) = s^*(t) \quad \Longrightarrow \quad S_{-k} = S_k^*$$

parte reale pari, parte immaginaria dispari

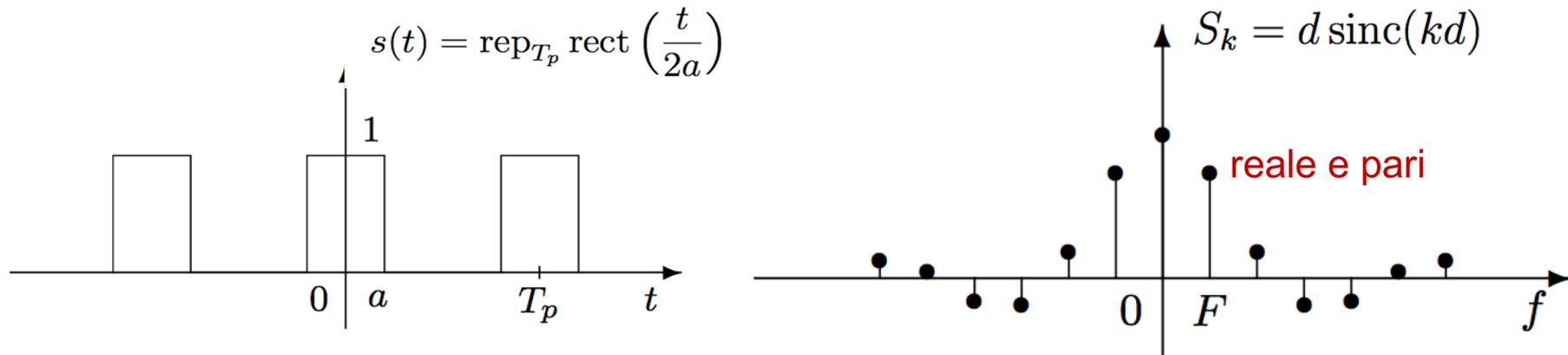
Verifichiamo la proprietà:

$$\begin{aligned} S_{-k}^* &= \left(\frac{1}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} s(t) e^{j2\pi kt/T_p} dt \right)^* \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} s^*(t) e^{-j2\pi kt/T_p} dt = S_k \end{aligned}$$



valore medio, reale

$$\begin{aligned} s(t) &= S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{S_k^*} e^{-jk\omega_0 t} \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re[S_k e^{jk\omega_0 t}] \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re[|S_k| e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)}] \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s(t) &= S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \\ &= d + \sum_{k=1}^{\infty} 2d \text{sinc}(kd) \cos(k\omega_0 t) \end{aligned}$$

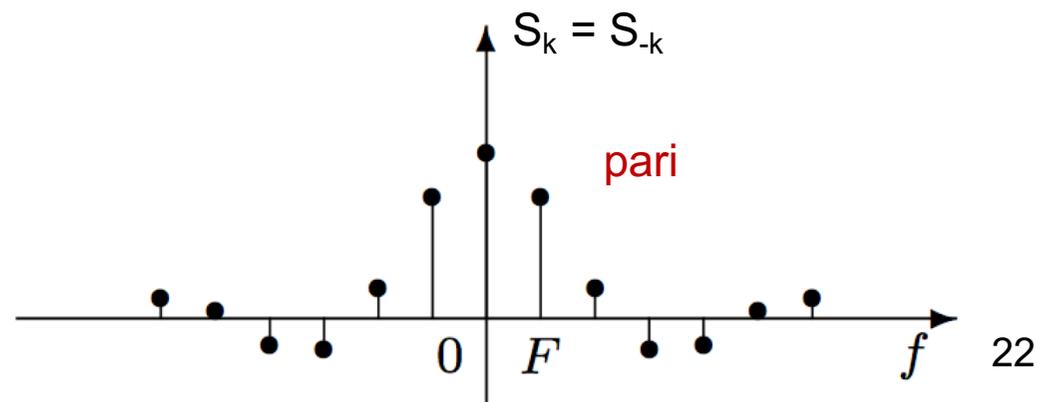
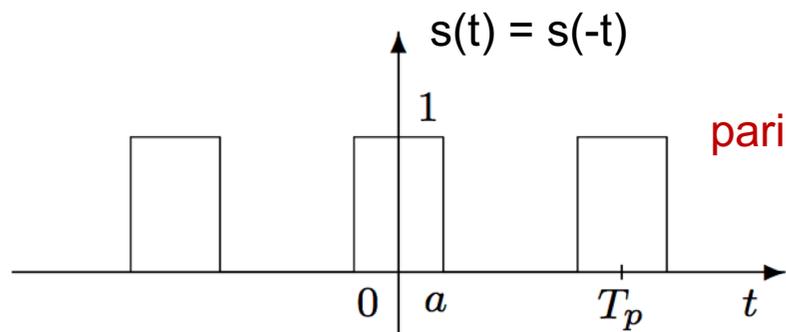


$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \quad \Longrightarrow \quad Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$



$$\begin{aligned} y(t) = x(-t) &\implies Y_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(-t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{-t_0-T_p}^{-t_0} x(u) e^{-j(-k)\omega_0 u} du \quad u = -t \\ &= X_{-k} \end{aligned}$$

Es. onda quadra





$$\begin{aligned} y(t) = x^*(t) &\implies Y_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x^*(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \left(\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt \right)^* \\ &= X_{-k}^* \end{aligned}$$

-(-k)



dominio del tempo

$s(t) = s(-t)$ pari

$s(t) = -s(-t)$ dispari

$s(t) = s^*(t)$ reale

$s(t) = s^*(t)$ reale e pari

$s(t) = s(-t)$

immaginaria

immaginaria e dispari

reale e dispari

pari

dispari

Hermitiana

reale e pari

?

?

?

$S_k = S_{-k}$

$S_k = -S_{-k}$

$S_k = S_{-k}^*$

$S_k = S_{-k}^* \longrightarrow S_k = S_k^*$

$S_k = S_{-k} \longrightarrow S_k = S_k^*$

dominio della frequenza/pulsazione



$$X_0 = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) dt = m_x$$



$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}}_{x(t)} \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_\ell^* e^{-j\ell\omega_0 t}}_{x^*(t)} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_k X_\ell^* \underbrace{\int_0^{T_p} e^{j(k-\ell)\omega_0 t} dt}_{T_p \delta(k-\ell)} \longleftarrow \text{ortogonalità da slide 9} \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_\ell^* \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(k-\ell)}_{X_\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |X_\ell|^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y(t) = x(t - t_1) \quad \Longrightarrow \quad Y_k &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t - t_1) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0-t_1}^{t_0-t_1+T_p} x(u) e^{-jk\omega_0(u+t_1)} du \quad \text{u = t-t}_1 \\ &= X_k e^{-jk\omega_0 t_1}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y(t) = x(t)e^{jm\omega_0 t} &\implies Y_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)e^{jm\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0-t_1}^{t_0-t_1+T_p} x(t)e^{-j\omega_0(k-m)t} dt \\ &= X_{k-m} \end{aligned}$$

Traslazione e modulazione sono due operazioni **duali**

$$x(t - t_1) \implies X_k e^{-jk\omega_0 t_1}$$

$$x(t) e^{jm\omega_0 t} \implies X_{k-m}$$



$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \Longrightarrow \quad Y_k = X_k \cdot jk\omega_0$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{X_k \cdot jk\omega_0}_{Y_k} e^{jk\omega_0 t}$$



$$z(t) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-u)y(u)du$$

$$\Rightarrow Z_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-u)y(u)du \right) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_p} y(u) \left(\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-u)e^{-jk\omega_0 t} dt \right) du$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_p} y(u) X_k e^{-jk\omega_0 u} du$$

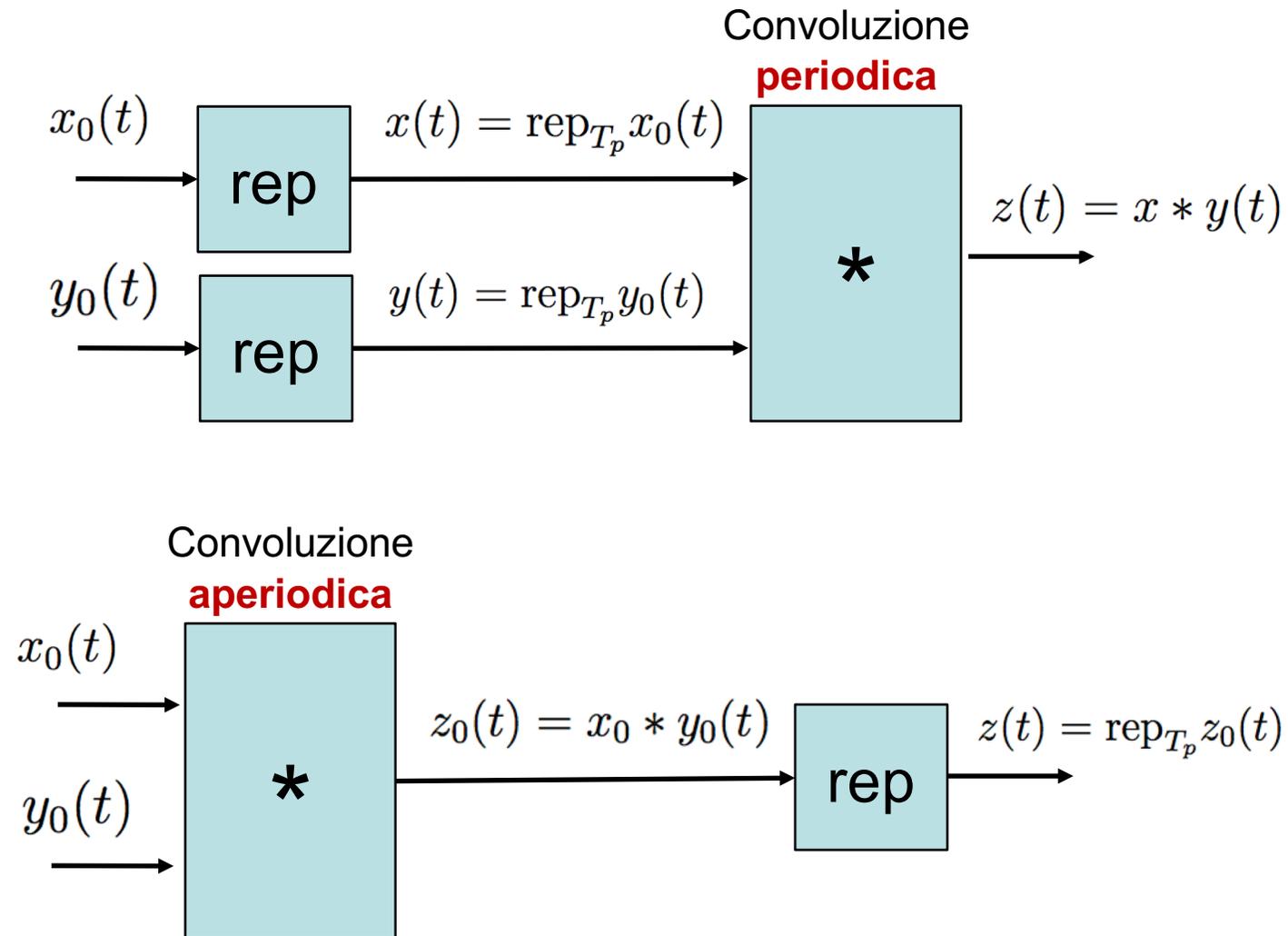
$$= T_p X_k Y_k$$



$$\begin{aligned} z(t) = x(t)y(t) &\implies Z_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{jm\omega_0 t} \right) y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m \left(\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j(k-m)\omega_0 t} y(t) dt \right) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m Y_{k-m} \end{aligned}$$

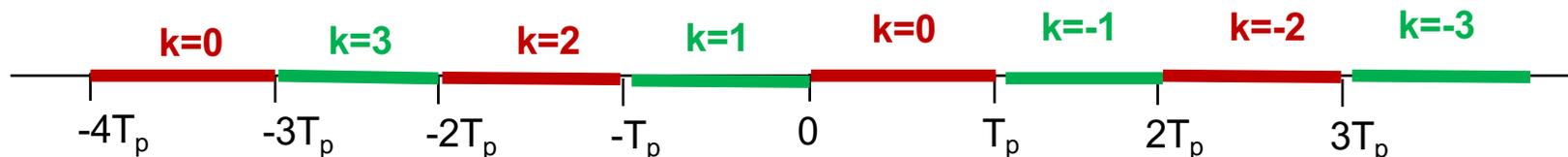
Prodotto e convoluzione sono due operazioni **duali**

$$x(t)y(t) \implies \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m Y_{k-m} \quad \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-u)y(u)du \implies T_p X_k Y_k$$





$$\begin{aligned}x * y(t) &= \int_0^{T_p} y(t - u)x(u) du \\&= \int_0^{T_p} y(t - u) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(u - kT_p) du \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_p} x_0(u - kT_p)y(t - u) du \\&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-kT_p}^{-(k-1)T_p}}_{\int_{-\infty}^{\infty}} x_0(v) \underbrace{y(t - v - kT_p)}_{y(t-v)} dv\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}x * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_0(v) y(t - v) dv \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x_0(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_0(t - v - nT_p) dv \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_0(v) y_0(t - v - nT_p) dv}_{x_0 * y_0(t - nT_p)}\end{aligned}$$

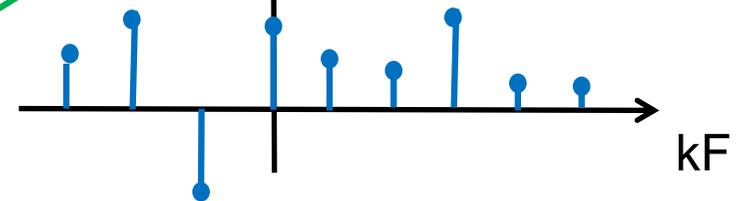


Periodicità non minima

o regola del cambio di scala

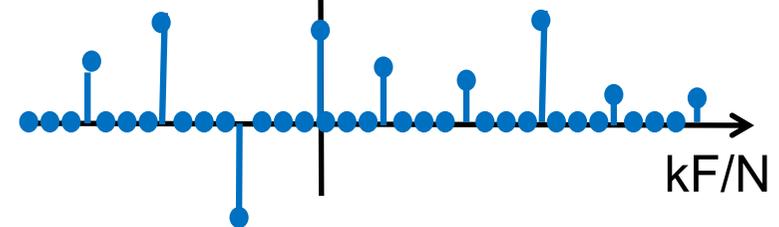
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_m e^{jm\omega_0/Nt}$$

$$\tilde{S}_m = \frac{1}{NT_p} \int_{t_0}^{t_0+NT_p} s(t) e^{-jm\omega_0/Nt} dt$$



**Questa è una
interpolazione**

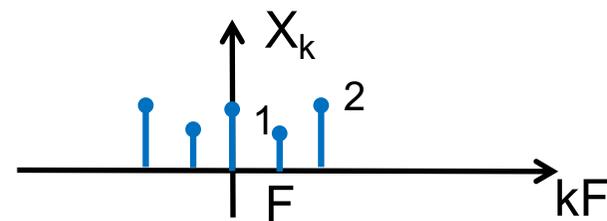
$$\tilde{S}_m = \begin{cases} S_k & m = Nk \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Es 1

Calcolare i coefficienti della serie di Fourier, valor medio e potenza per i seguenti segnali

- **l'impulso** periodico $\text{comb}_{T_p}(t)$
- il segnale **costante** $s(t)=1$
- la **sinusoide** $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ con $\omega_0=2\pi/T_p$
- il **segnale** $s(t) = x(t) \cos(10\omega_0 t)$ con $\omega_0=2\pi F$, $F=1/T_p$ e T_p la periodicità del segnale $x(t)$ avente coefficienti di Fourier

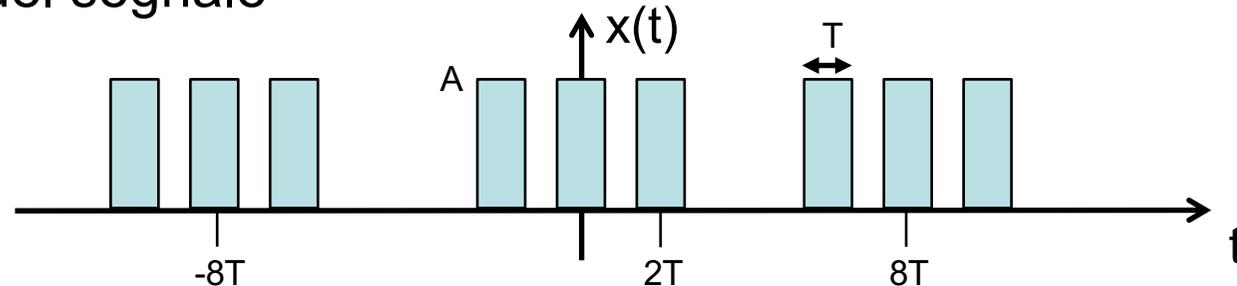


- il segnale $s(t) = x(t) \sin(10\omega_0 t)$ con $x(t)$ e ω_0 definite come sopra



Es 2

Calcolare i coefficienti della serie di Fourier, valor medio e potenza del segnale



Es 3

Calcolare la periodicità ed i coefficienti della serie di Fourier del segnale $x(t) = A \sin(\pi t/D) + A \cos^2(2\pi t/3D)$

Es 4 (combinazione di **simmetrie**)

Del segnale $s(t)$ sappiamo che: è reale e dispari; è periodico $T_p=2$; ha coefficienti di Fourier nulli per $|k|>1$; ha potenza $P_s=1$. Si chiede di identificare $s(t)$.



Es 5 (sinc periodico)

Calcolare la potenza del segnale $s(t) = 3 \sin(\pi t) / 5 \sin(\pi t/5)$

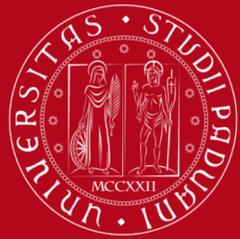
Es 6

Quali di questi segnali sono reali, e quali pari?

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{100} e^{j2\pi \frac{k}{50} t}$$

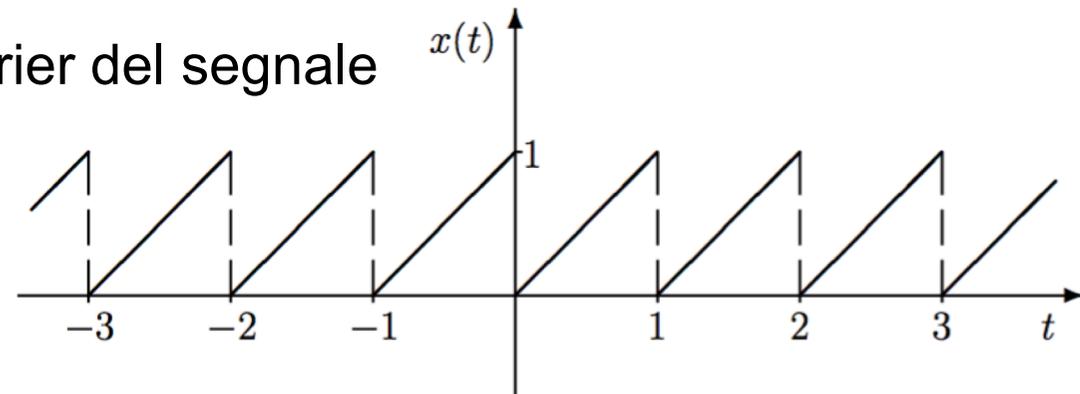
$$x_2(t) = \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi) e^{j2\pi \frac{k}{50} t}$$

$$x_3(t) = \sum_{k=-100}^{100} j \sin(k\frac{\pi}{2}) e^{j2\pi \frac{k}{50} t}$$



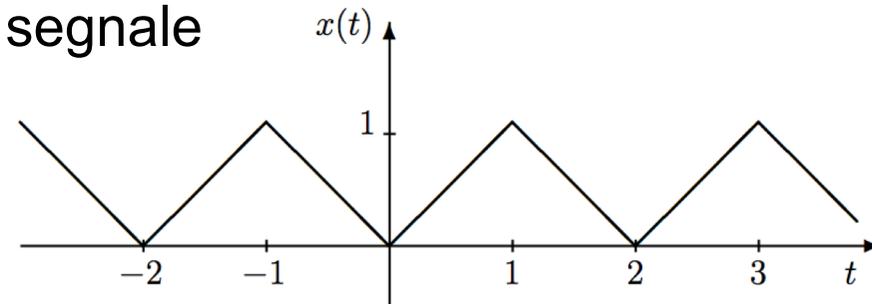
Es 7 (dente di sega)

Calcolare la serie di Fourier del segnale



Es 8 (onda triangolare)

Calcolare la serie di Fourier del segnale



La trasformata di Fourier

estensione all'aperiodico



Dal periodico all'aperiodico

la trasformata di Fourier

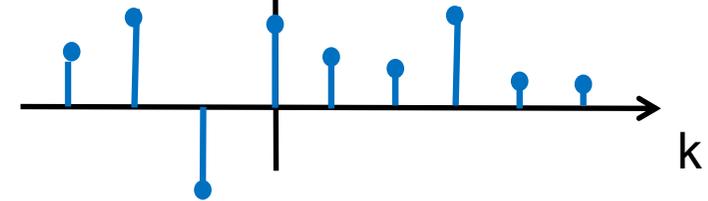
periodico

$$s(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{S}(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

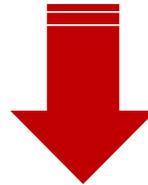
\nearrow $1/T_p$

discreto

$$\tilde{S}(jk\omega_0) = \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



facciamo diventare ω_0
sempre più piccolo ...
facciamo tendere T_p
all'infinito

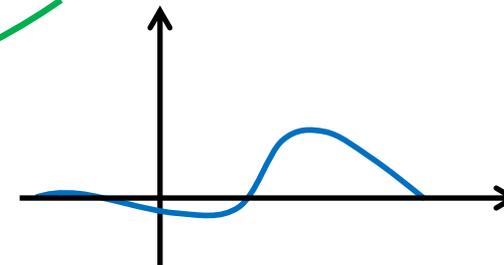


$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

aperiodico

continuo

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$





La trasformata di Fourier

per segnali continui e aperiodici

dominio del tempo

segnale continuo
aperiodico

$s(t)$

proiezione su una base ortogonale

La trasformata di Fourier
(segnale continuo aperiodico)

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

ricostruzione del segnale

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

dominio della pulsazione (frequenza $f=\omega/2\pi$) 42



Quali classi di segnali periodici ammettono di essere rappresentati tramite trasformata di Fourier?

Ovvero per cui:

- la trasformata di Fourier esiste
- la trasformata inversa converge, e converge al segnale

condizioni di Dirichlet

Segnali che:

- sono **assolutamente integrabili**
- hanno un numero finito di **discontinuità**, di valore finito
- hanno un numero finito di max e min

condizioni di Riesz-Fisher

Segnali che:

- hanno **energia finita**

ma anche

- le **distribuzioni** (i delta)
- combinazioni lineari delle varie classi



Es 1

Calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali

- **Esponenziale** unilatero $s(t) = e^{-at} 1(t)$, $a > 0$
- Esponenziale bilatero $s(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$
- **Rettangolo** $s(t) = \text{rect}(t)$
- **Delta** di Dirac $\delta(t)$

Proprietà della trasformata di Fourier

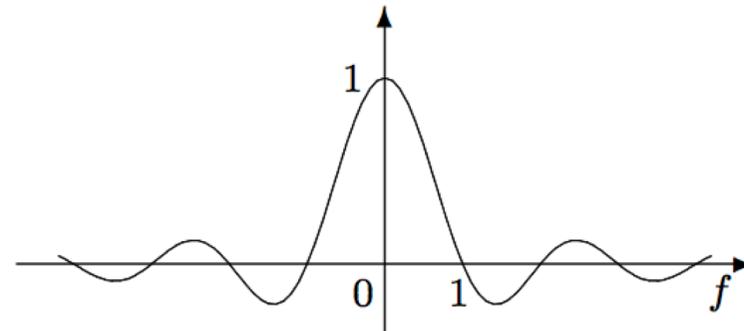
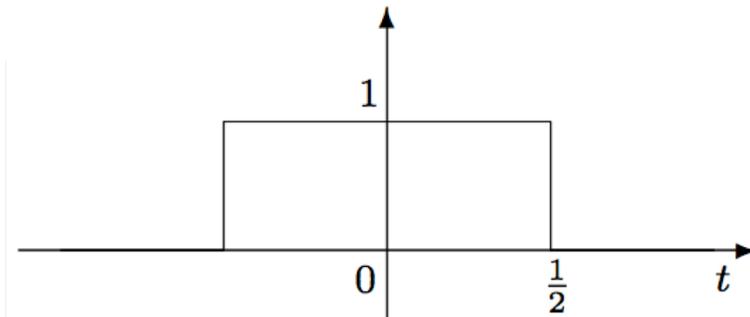


$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \quad \Longrightarrow \quad Z(j\omega) = \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$$



$$\begin{aligned} y(t) = x(-t) \quad \implies \quad Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{j\omega u} du \\ &= X(-j\omega) \end{aligned}$$

Es. rect: $s(t)=s(-t) \rightarrow S(j\omega) = S(-j\omega)$





$$\begin{aligned} y(t) = x^*(t) &\quad \Longrightarrow \quad Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right)^* \\ &= X^*(-j\omega) \end{aligned}$$



dominio del tempo

$s(t) = s(-t)$	pari	pari	$S(j\omega) = S(-j\omega)$
$s(t) = -s(-t)$	dispari	dispari	$S(j\omega) = -S(-j\omega)$
$s(t) = s^*(t)$	reale	Hermitiana	$S(j\omega) = S^*(-j\omega)$
$s(t) = s^*(t)$	reale e pari	reale e pari	$S(j\omega) = S^*(-j\omega) \longrightarrow S(j\omega) = S^*(j\omega)$
$s(t) = s(-t)$			$S(j\omega) = S(-j\omega) \nearrow$
	immaginaria	?	
	immaginaria e dispari	?	
	reale e dispari	?	

dominio della pulsazione/ frequenza



$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \underbrace{S(-ju)}_{S^*(ju)} e^{-jut} du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^{\infty} \underbrace{S(j\omega)}_{|S(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}} e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} |S(j\omega)| \Re [e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t}] d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} |S(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y(t) = x(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega(u+t_0)} du \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u} du \\ &= X(j\omega)e^{-j\omega t_0}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y(t) = x(t)e^{j\omega_0 t} &\implies Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= X(j\omega - j\omega_0)\end{aligned}$$

Traslazione e modulazione sono due operazioni **duali**

$$x(t - t_0) \implies X(j\omega)e^{-j\omega t_0} \qquad x(t)e^{j\omega_0 t} \implies X(j\omega - j\omega_0)$$



$$\begin{aligned} y(t) = x(t/a) \quad \Longrightarrow \quad Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t/a) e^{-j\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega a u} du \\ &= aX(ja\omega) \end{aligned}$$



$$s(t) \implies S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

Cosa succede se applico la trasformata di Fourier due volte?

$$S(j\omega) \implies \tilde{S}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{-ju\omega} d\omega = 2\pi s(-u)$$

Ovvero da una coppia segnale-trasformata ne individuo una seconda

$$\{s(t), S(j\omega)\} \implies \{S(jt), 2\pi s(-\omega)\}$$

$$\{\text{rect}(t), \text{sinc}(\omega/2\pi)\} \implies \{\text{sinc}(t/2\pi), 2\pi \cdot \text{rect}(\omega)\}$$



$$\begin{aligned} z(t) = x * y(t) &\quad \Longrightarrow \quad Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t-u)e^{-j\omega t} dt \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)Y(j\omega)e^{-j\omega u} du \\ &= X(j\omega)Y(j\omega) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z(t) = x(t)y(t) &\quad \Longrightarrow \quad Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(jv)e^{jvt} dv \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(jv) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-v)t} dt \right) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(jv)X(j(\omega-v)) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega) \end{aligned}$$

Prodotto e convoluzione sono due operazioni **duali**

$$x * y(t) \quad \Longrightarrow \quad X(j\omega)Y(j\omega) \qquad x(t)y(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)$$



coincide con la trasformata/antitrasformata in 0

$$S(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \underbrace{e^{-j0t}}_1 dt = A_s$$

$$s(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \underbrace{e^{j0\omega}}_1 d\omega = \frac{1}{2\pi} A_s$$



$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} E_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega$$

Prova:

$$z(t) = x(t)y^*(t) \quad \Longrightarrow \quad Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X * Y_-^*(j\omega)$$

$$\begin{aligned} A_z &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = Z(j0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jv) \underbrace{Y_-^*(-jv)}_{Y^*(jv)} dv \end{aligned}$$



$$y(t) = x'(t) \quad \Longrightarrow \quad Y(j\omega) = j\omega \cdot X(j\omega)$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\omega) j\omega}_{Y(j\omega)} \cdot e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$



$$y(t) = tx(t) \quad \Longrightarrow \quad Y(j\omega) = jX'(j\omega)$$

$$\begin{aligned} X'(j\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{de^{-j\omega t}}{d\omega} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-jtx(t)}_{y(t)} \cdot e^{j\omega t} dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du &\quad \Longrightarrow \quad Y(j\omega) = X(j\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \\ &= \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j\omega)\delta(\omega) \\ &= \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = x * 1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)1(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)1_-(u-t) du \end{aligned}$$



Es 1

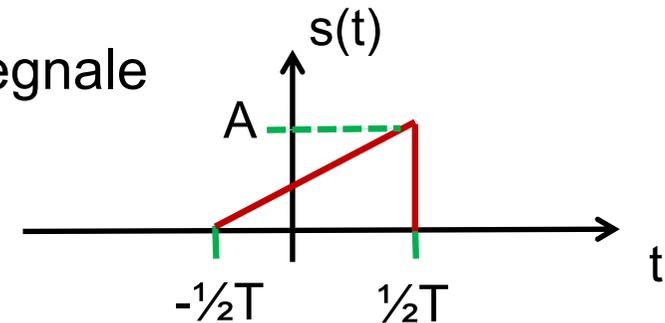
Calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali

- a) **Sinc** $s(t) = \text{sinc}(t)$
- b) **Rettangolo** scalato $s(t) = \text{rect}(t/T)$
- c) **Sinc** scalato $s(t) = \text{sinc}(t/T)$
- d) Segnale **costante** $s(t) = 1$
- e) **Delta traslato** $s(t) = \delta(t-t_0)$
- f) **Esponenziale** complesso $s(t) = e^{j\omega_0 t}$
- g) **Sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ oppure $s(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$
- h) **Sinc quadro** $s(t) = \text{sinc}^2(t/T)$
- i) **Triangolo** $s(t) = \text{triangle}(t/D)$
- j) **Modulazione** double-side-band $s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$
- k) Convoluzione $s(t) = x * x(t)$ con $x(t) = e^{-at} 1(t)$, $a > 0$
- l) Convoluzione $s(t) = \text{sinc} * \text{sinc}(t)$
- m) Trasformazione $s(t) = x(-2t + t_0)$
- n) Segnale **segno** $s(t) = \text{sign}(t)$
- o) Segnale **gradino** $s(t) = 1(t)$



Es 2

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale



Es 3

Calcolare l'area dei seguenti segnali

- $\text{sinc}(t)$
- $\text{sinc}^3(t)$

Es 4

Calcolare l'energia dei seguenti segnali

- $\text{sinc}(t)$

Trasformata vs. Serie di Fourier

Relazione aperiodico-periodico



Serie vs trasformata di Fourier

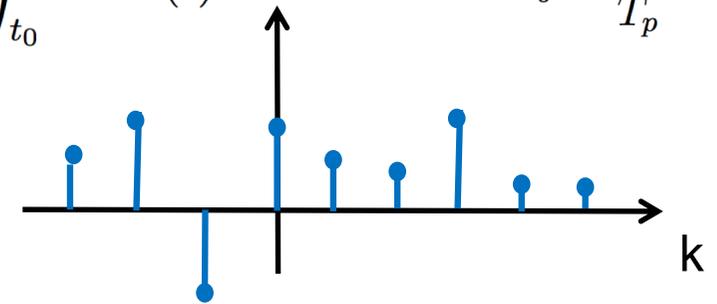
ripasso

periodico

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

discreto

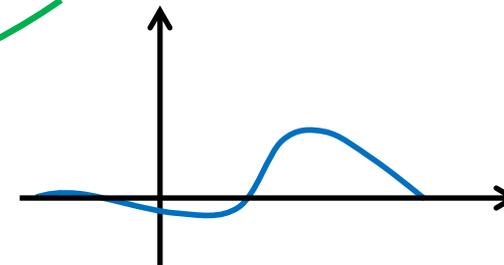


$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

continuo

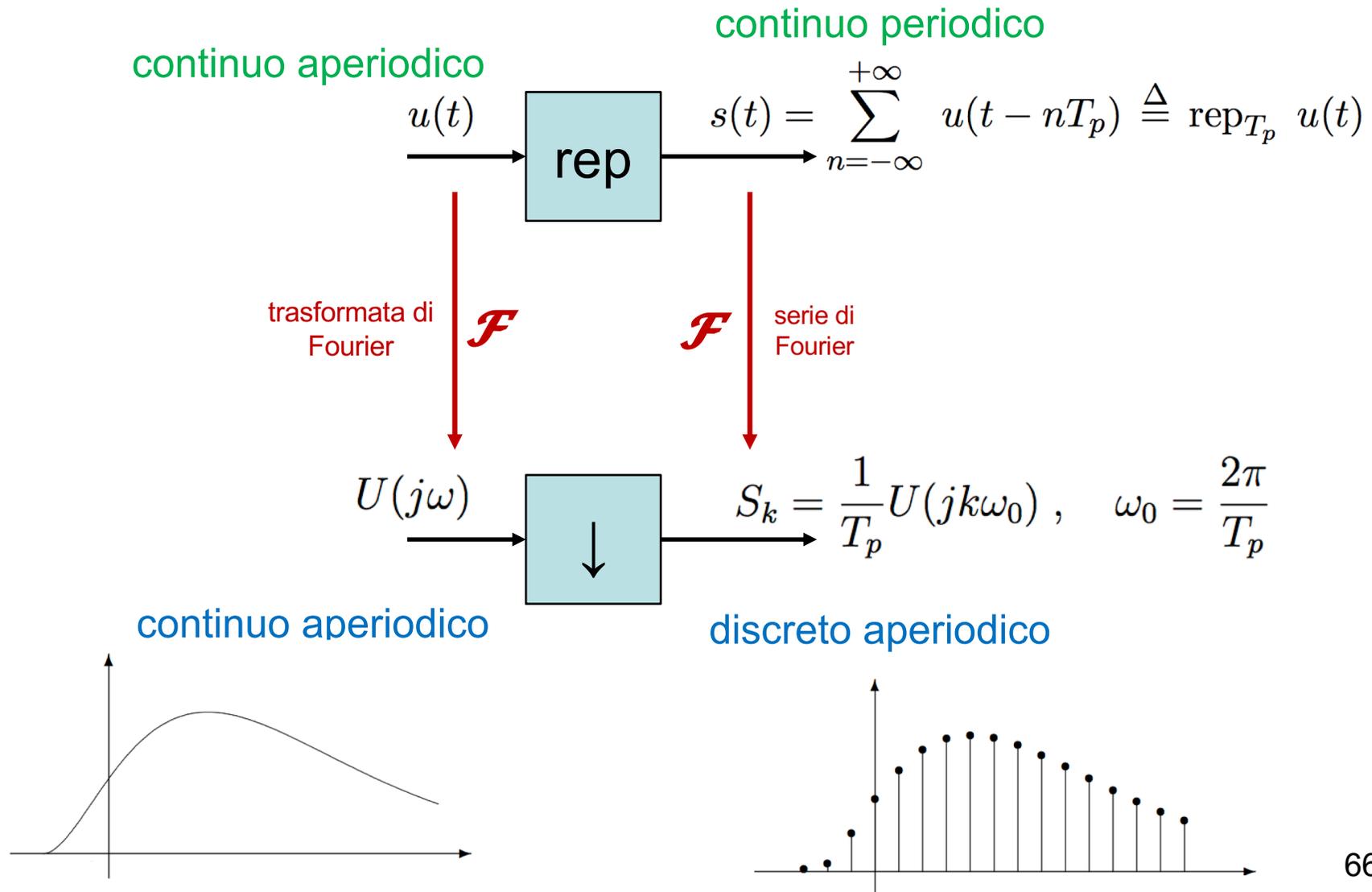
aperiodico





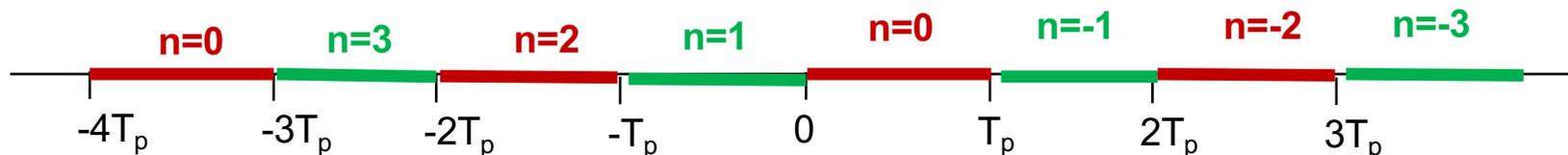
La periodizzazione

quale è la serie di Fourier di una ripetizione periodica?





$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t - nT_p) \right) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_p} \underbrace{u(t - nT_p)}_v e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-nT_p}^{-(n-1)T_p}}_{\int_{-\infty}^{\infty}} u(v) \underbrace{e^{-jk\omega_0(v+nT_p)}}_{e^{-j\omega_0 v}} dv \end{aligned}$$





continuo
periodico

$$s(t) = s(t + T_p)$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$$

serie di
Fourier

\mathcal{F}

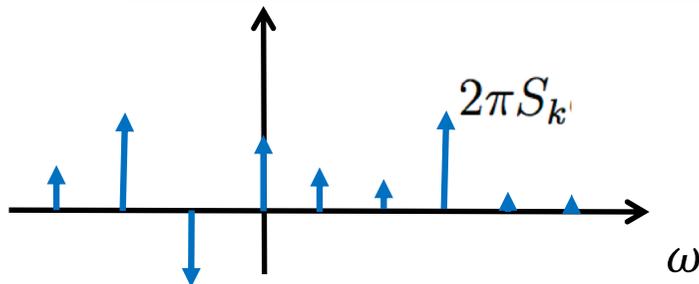
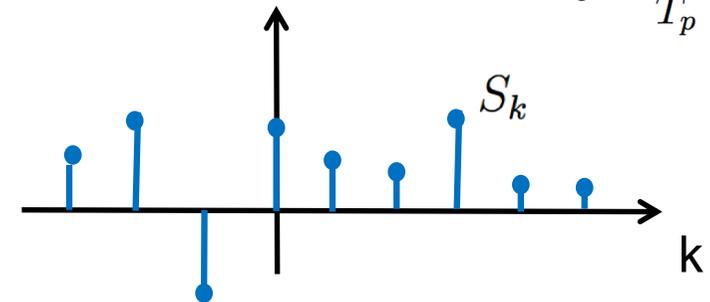
$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

trasformata di
Fourier

\mathcal{F}

$$\tilde{S}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi S_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

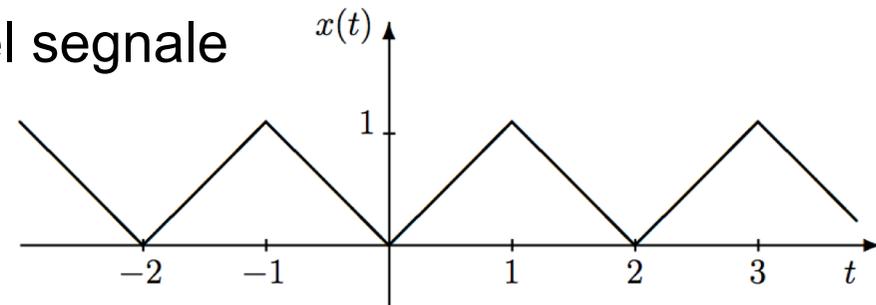
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$





Es 1

Calcolare la serie di Fourier del segnale



Es 2

Calcolare la serie di Fourier dei segnali

- **Coseno rettificato** $s(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$
- **Onda quadra** di periodo T_p e duty cycle $d = (2D)/T_p$

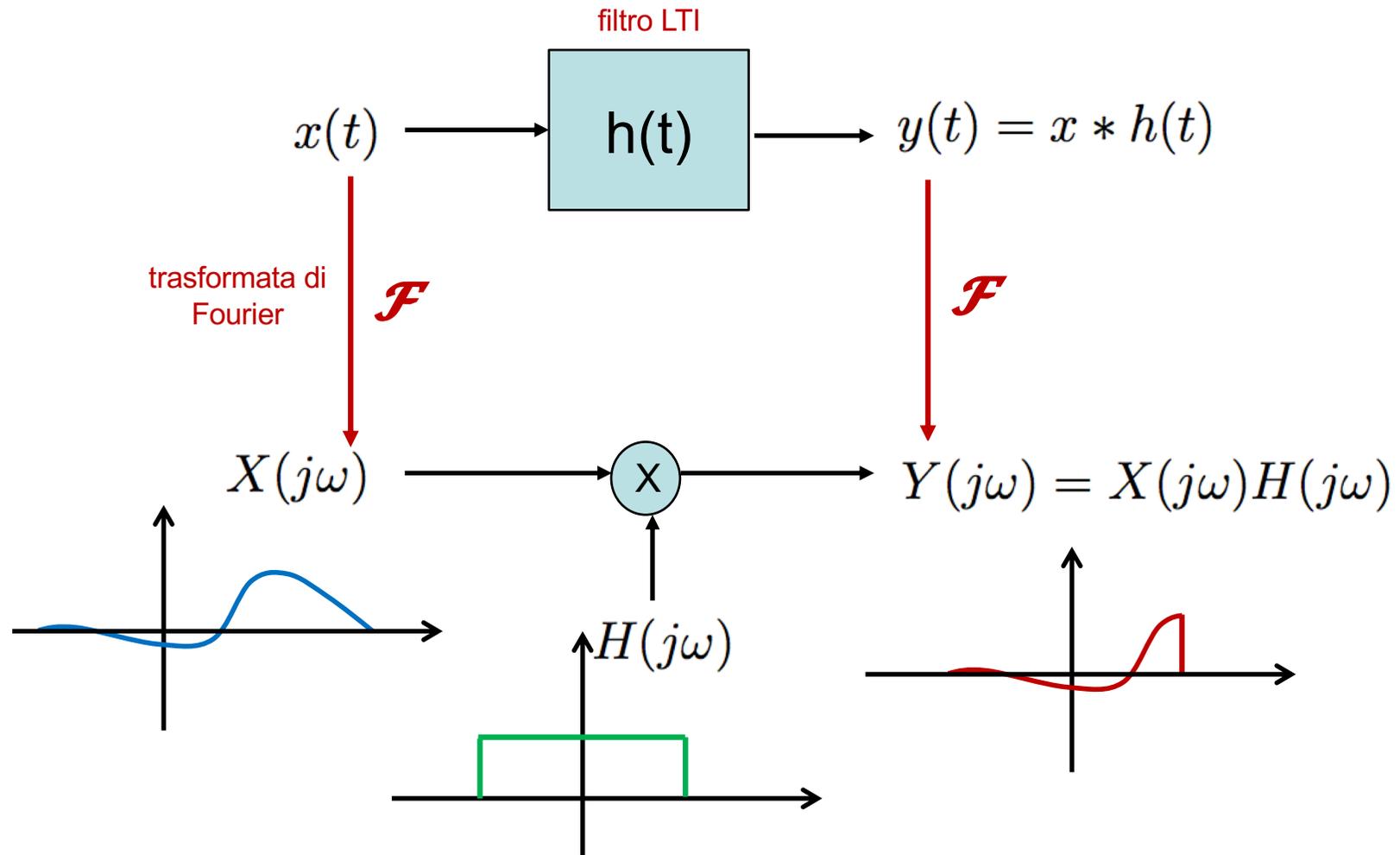
Il filtraggio

Visto in frequenza



Filtraggio di segnali aperiodici

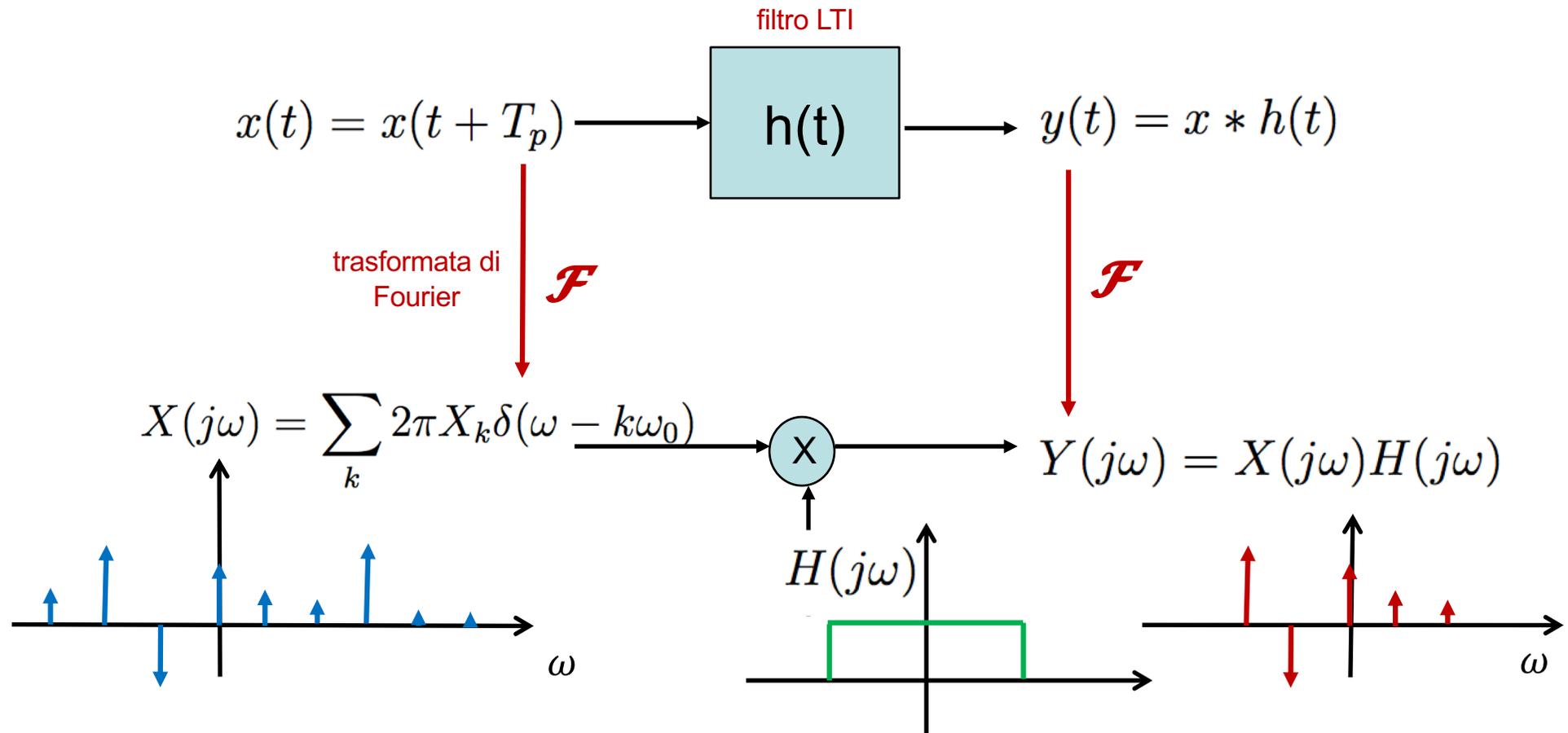
Interpretazione tramite trasformata di Fourier





Filtraggio di segnali periodici

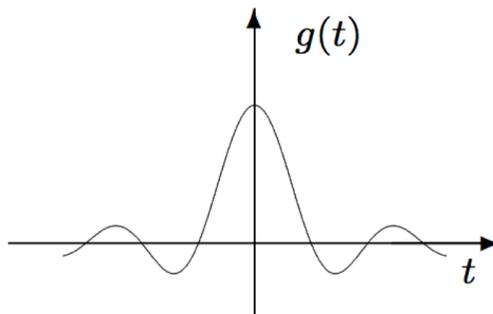
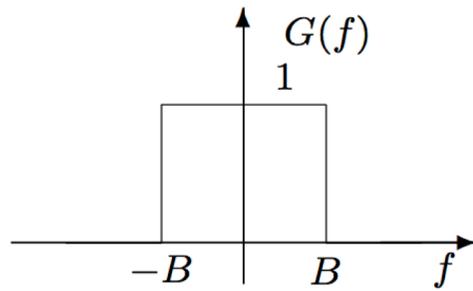
Interpretazione tramite trasformata di Fourier



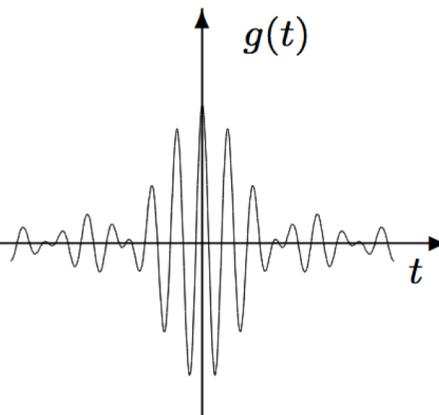
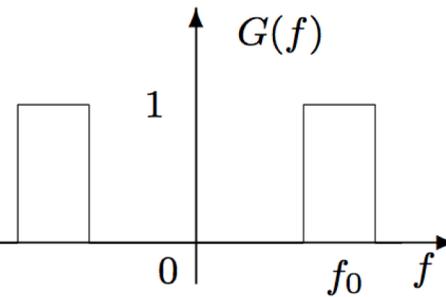
$$Y(j\omega) = \sum_k 2\pi X_k H(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$



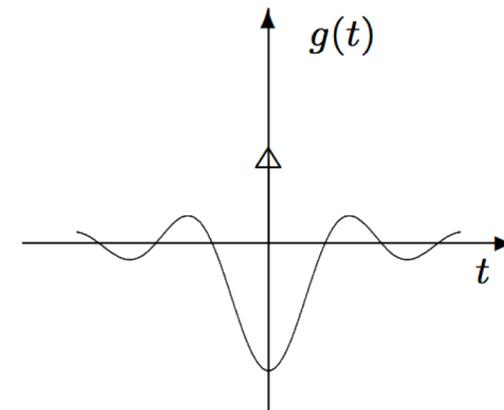
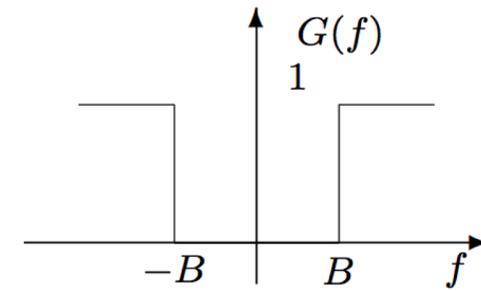
low-pass



band-pass

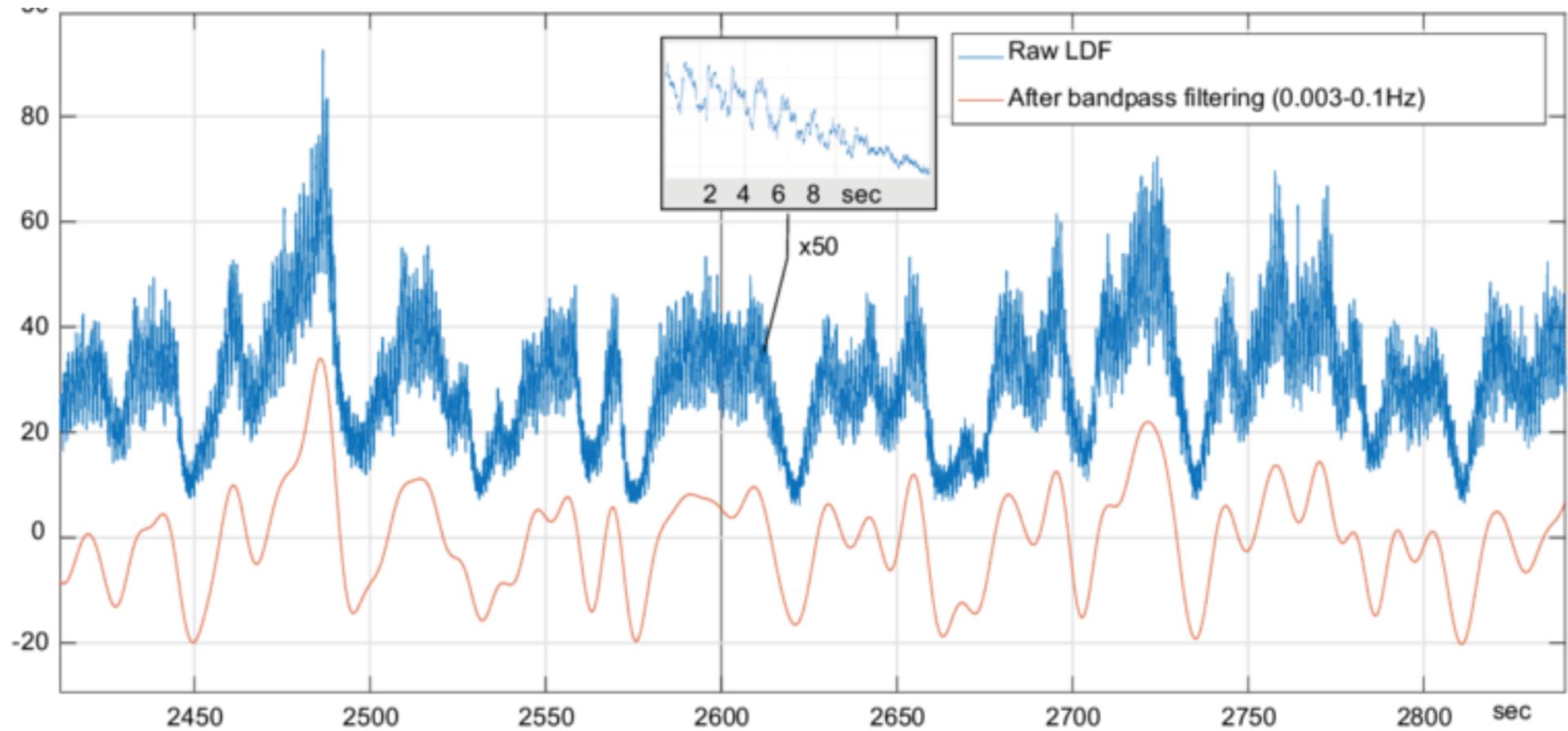


high-pass





Effetto di un filtraggio





Equazioni base

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$

$$y'(t) = \frac{i(t)}{C}$$

\mathcal{F}

$$X(j\omega) = RI(j\omega) + Y(j\omega)$$

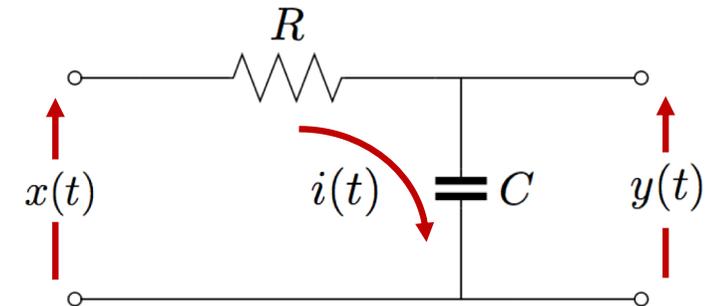
$$I(j\omega) = j\omega C \cdot Y(j\omega)$$

ovvero

$$X(j\omega) = (1 + j\omega RC) \cdot Y(j\omega)$$

ovvero

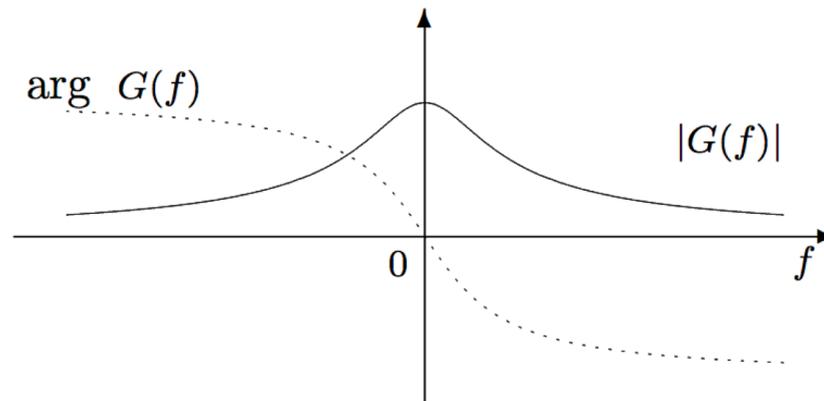
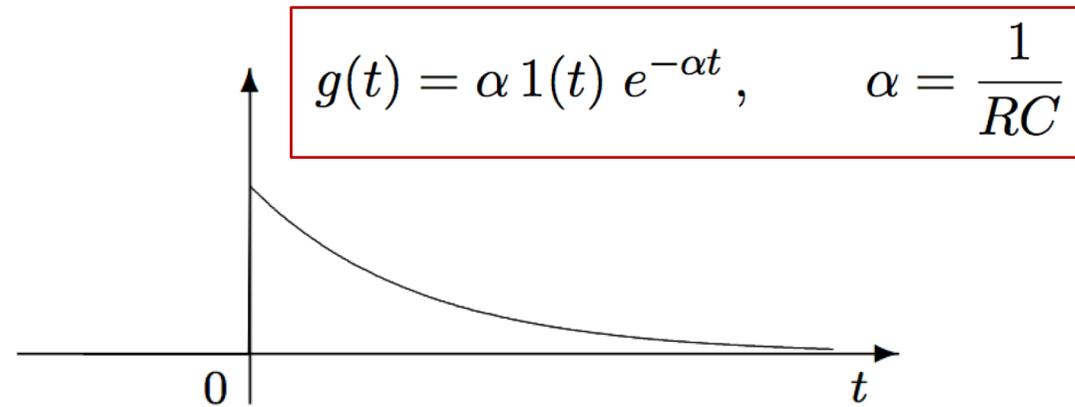
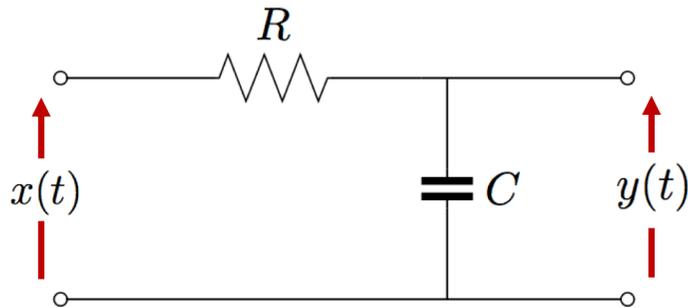
$$Y(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} X(j\omega)$$



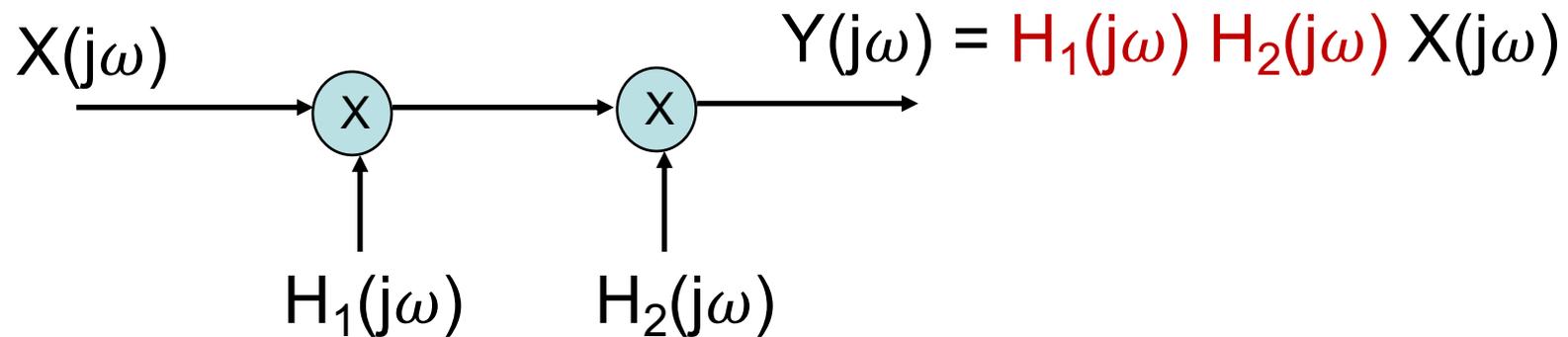
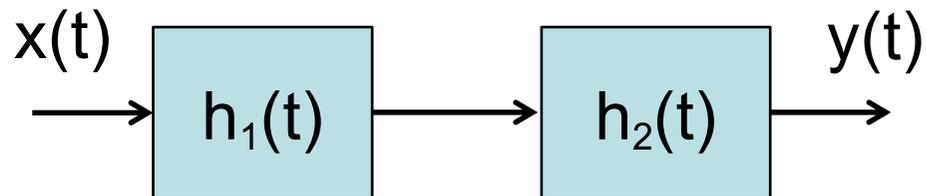


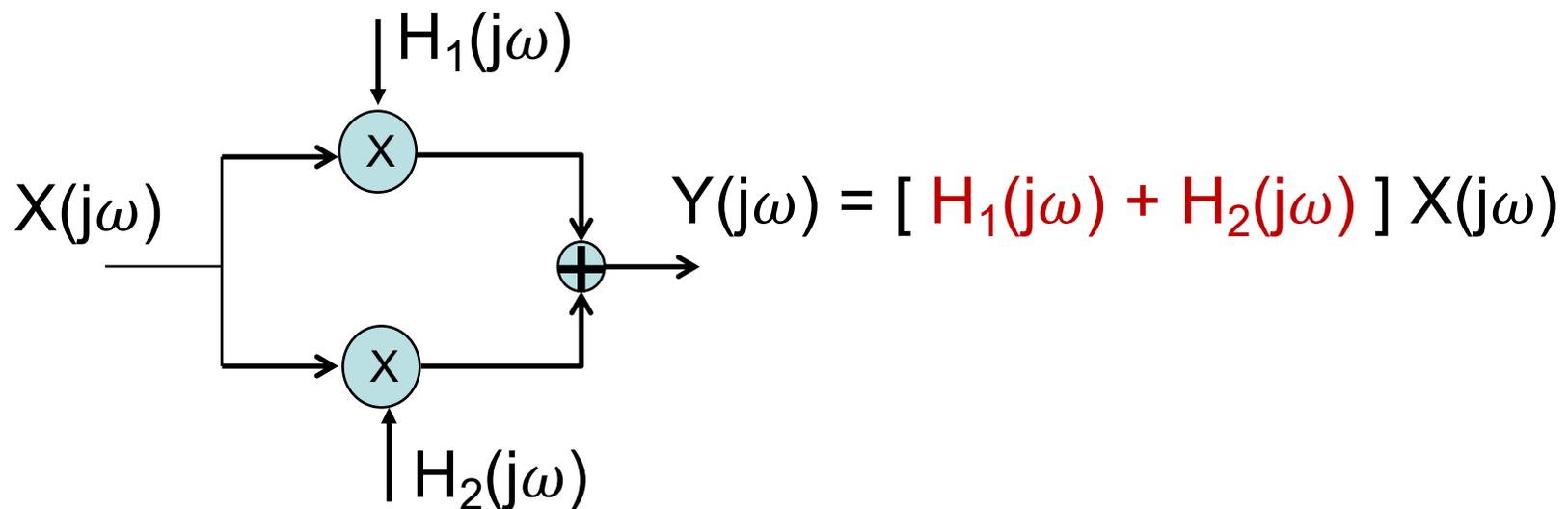
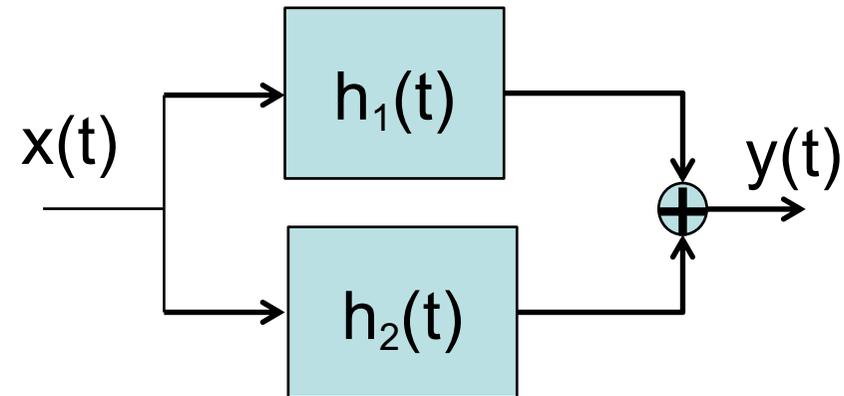
Il filtro RC

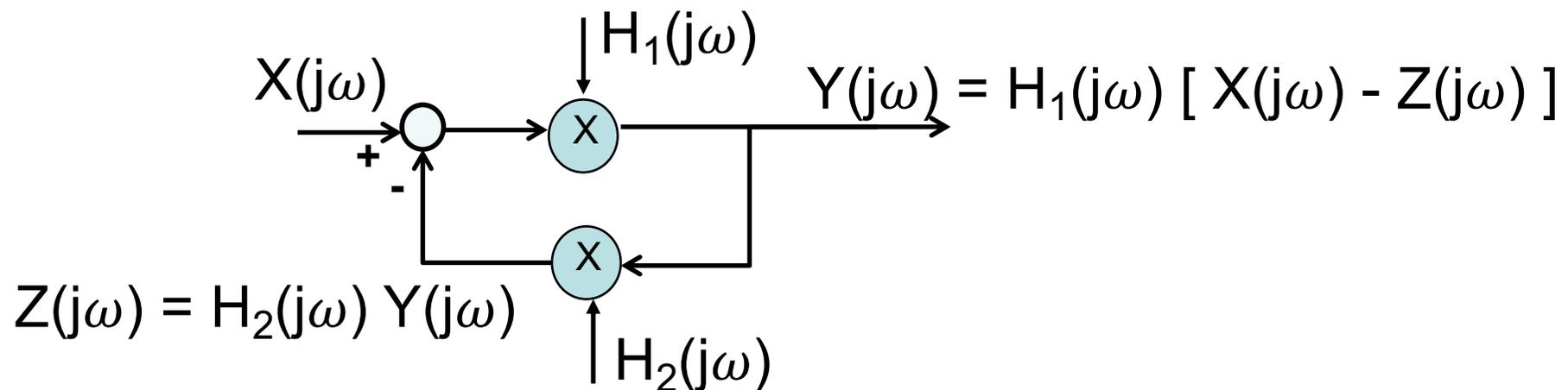
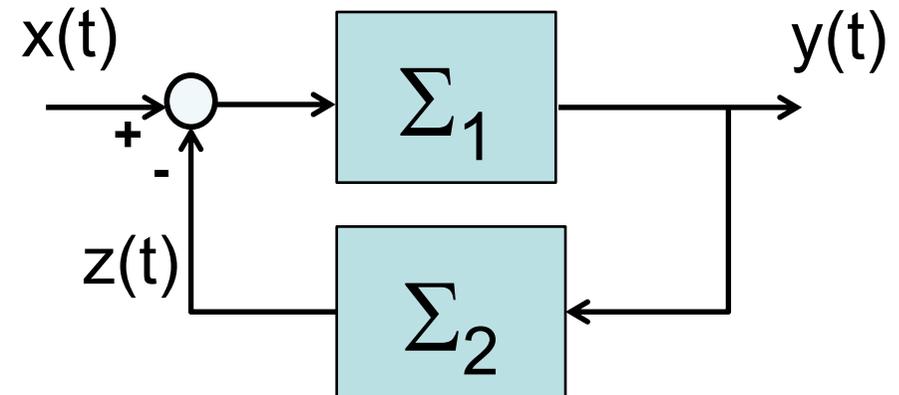
Esempio di filtro passabasso reale



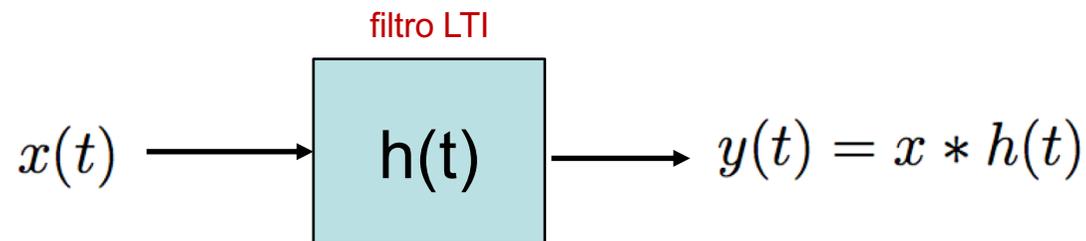
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$







$$Y(j\omega) = \frac{H_1(j\omega) X(j\omega)}{1 + H_1(j\omega) H_2(j\omega)}$$



il filtro **NON distorto** il segnale se $y(t) = \mathbf{A} x(t-\mathbf{t}_0)$

ovvero $Y(j\omega) = \mathbf{A} X(j\omega) \mathbf{exp}(-j\omega\mathbf{t}_0)$

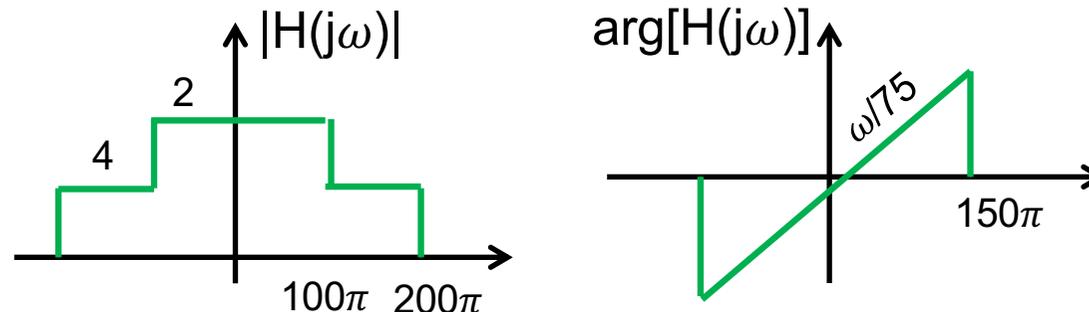


Es 1

Un filtro reale $h(t)$ distorce il segnale $\cos(2\pi f_0 t)$?

Es 2

Dato l'ingresso $x(t) = \cos(50\pi t) + 5 \cos(120 \pi t)$ calcolare la risposta al filtro $h(t)$. Il filtro distorce il segnale?



Es 3

Un filtro $h(t)$ mappa il segnale $x(t) = \text{triang}(t/3)$ nel segnale $y(t) = \text{triang}((t+2)/3) + 2 \text{triang}(t/3) + 4 \text{triang}((t-1)/3)$. Identificare $h(t)$, $H(j\omega)$, e la risposta al gradino $1(t)$. Il filtro è BIBO stabile?

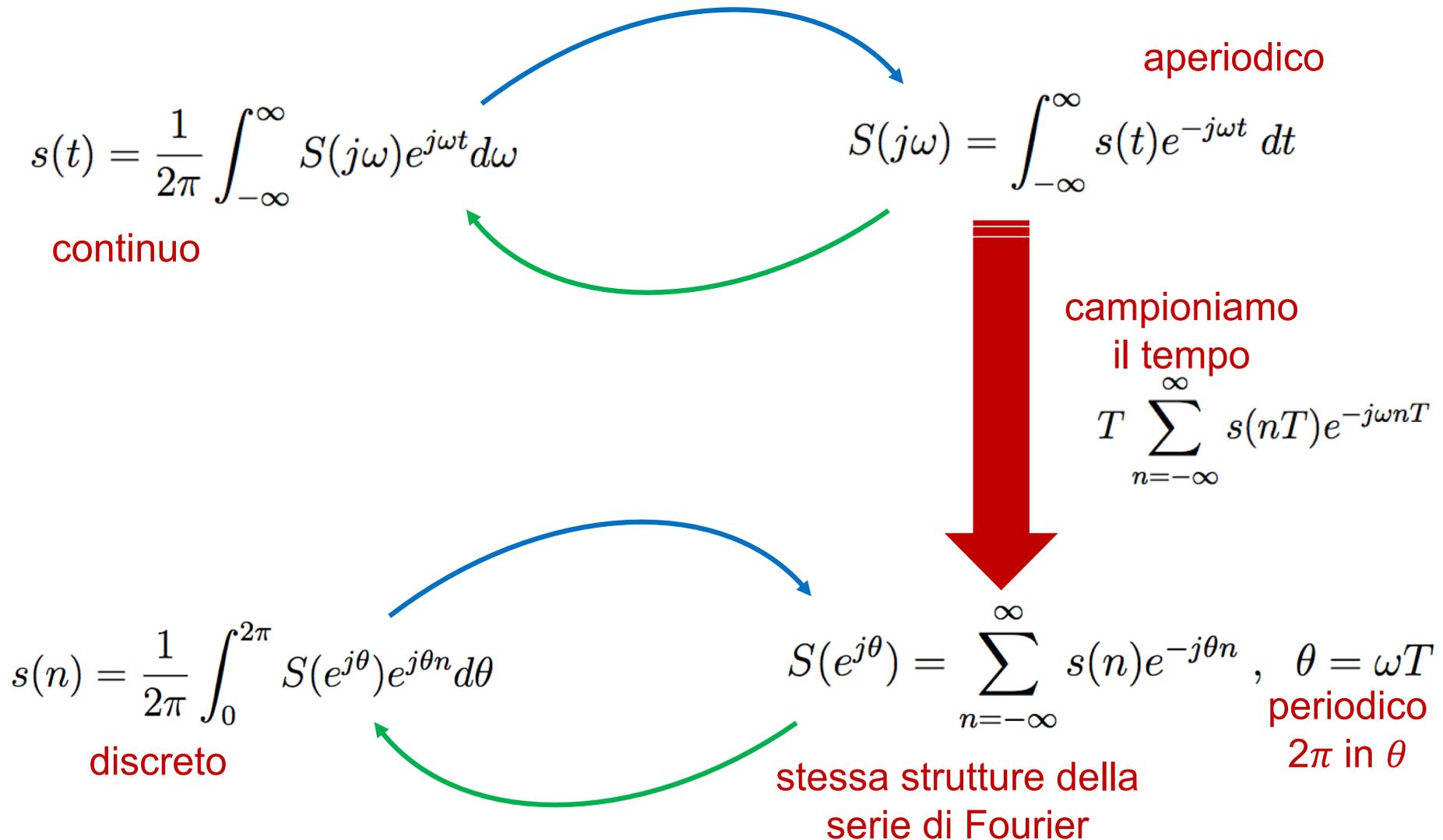
La trasformata discreta di Fourier

Per segnali a tempo discreto



Dal continuo al discreto

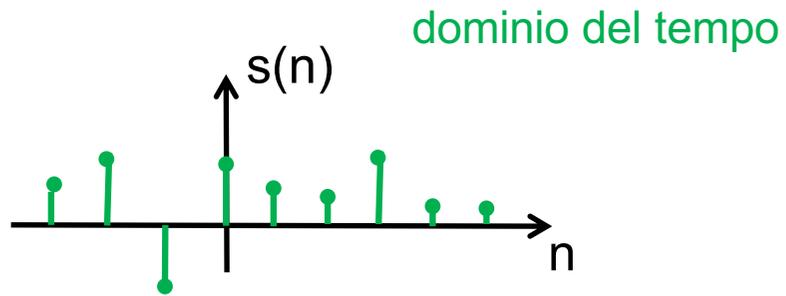
la trasformata a tempo discreto di Fourier





La trasformata discreta di Fourier

DTFT = discrete time Fourier transform



segnale discreto
aperiodico

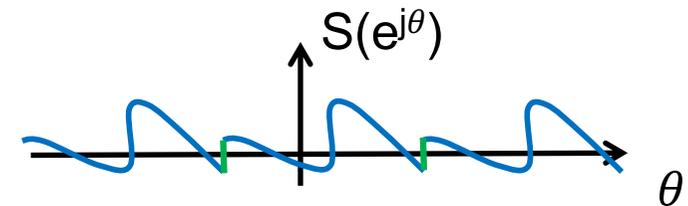
$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$$

proiezione su una base ortogonale

ricostruzione del segnale

trasformata
continua periodica

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j\theta n}, \quad \theta = \omega T$$



dominio di Fourier



linearità

$$z(n) = \alpha x(n) + \beta y(n) \quad \Longrightarrow \quad Z(e^{j\theta}) = \alpha X(e^{j\theta}) + \beta Y(e^{j\theta})$$

ribaltamento e coniugio

$$y(n) = x(-n) \quad \Longrightarrow \quad Y(e^{j\theta}) = X(e^{-j\theta})$$

$$y(n) = x^*(n) \quad \Longrightarrow \quad Y(e^{j\theta}) = X^*(e^{-j\theta})$$

traslazione e modulazione

$$y(n) = x(n - n_0) \quad \Longrightarrow \quad Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})e^{-j\theta n_0}$$

$$y(n) = x(n)e^{j\theta_0 n} \quad \Longrightarrow \quad Y(e^{j(\theta - \theta_0)})$$



convoluzione e prodotto

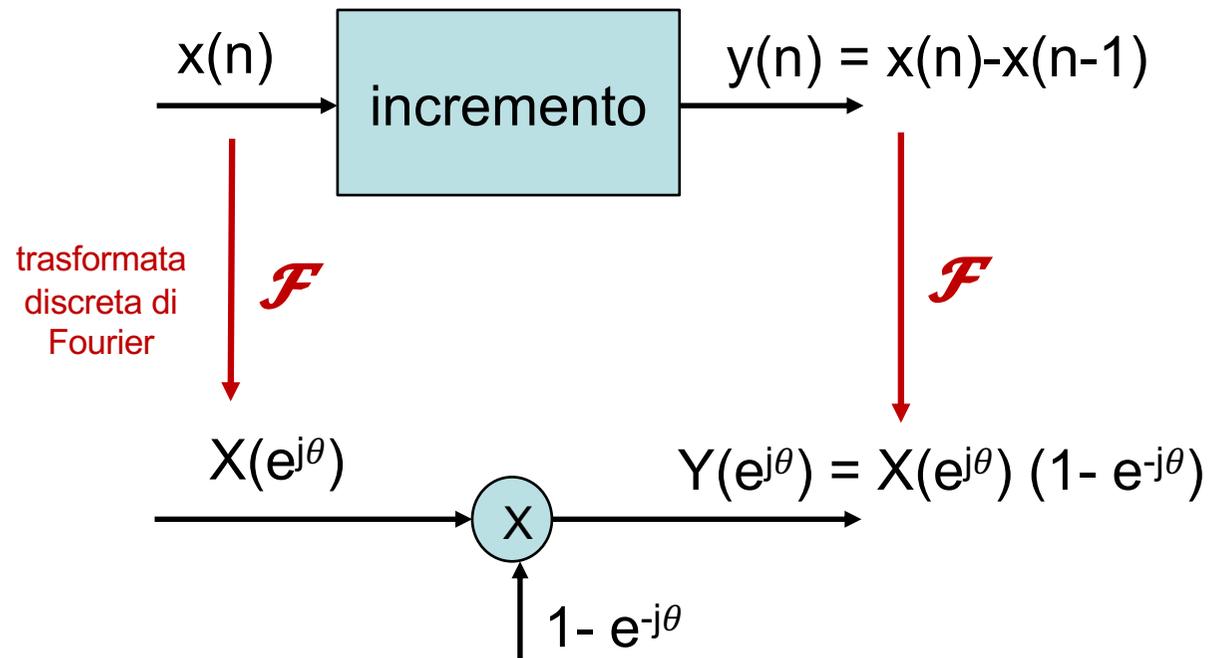
$$z(n) = x * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \quad \Longrightarrow \quad Z(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$$

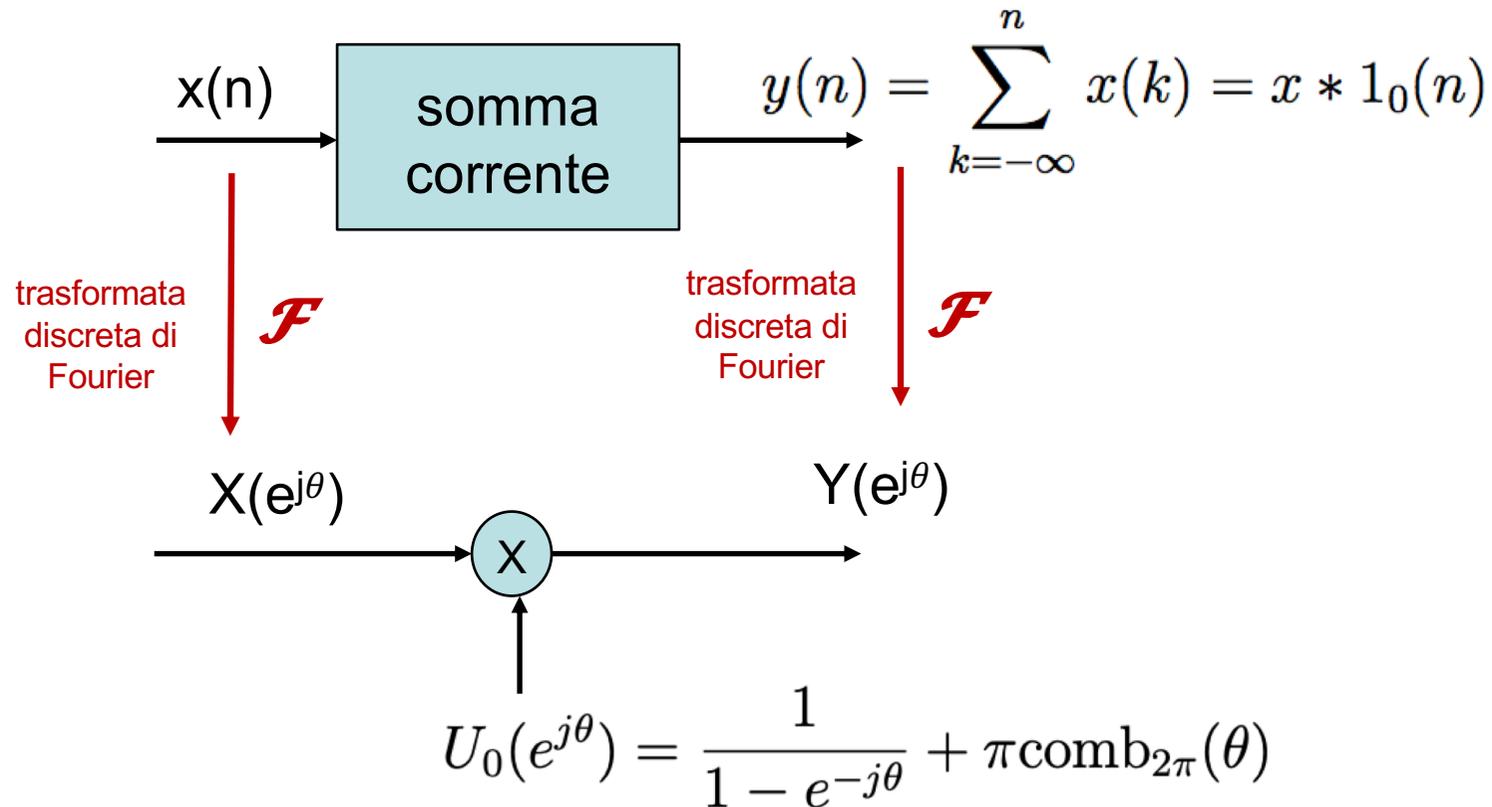
$$z(n) = x(n)y(n) \quad \Longrightarrow \quad Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j(u-\theta)})Y(e^{ju})du$$

area e energia/potenza

$$S(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) = A_s \quad s(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\theta})d\theta = \frac{A_s}{2\pi}$$

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta = P_s$$





$$Y(e^{j\theta}) = U_0(e^{j\theta})X(e^{j\theta}) = \frac{X(e^{j\theta})}{1 - e^{-j\theta}} + \underbrace{X(e^{j0})}_{A_x} \pi \text{comb}_{2\pi}(\theta)$$



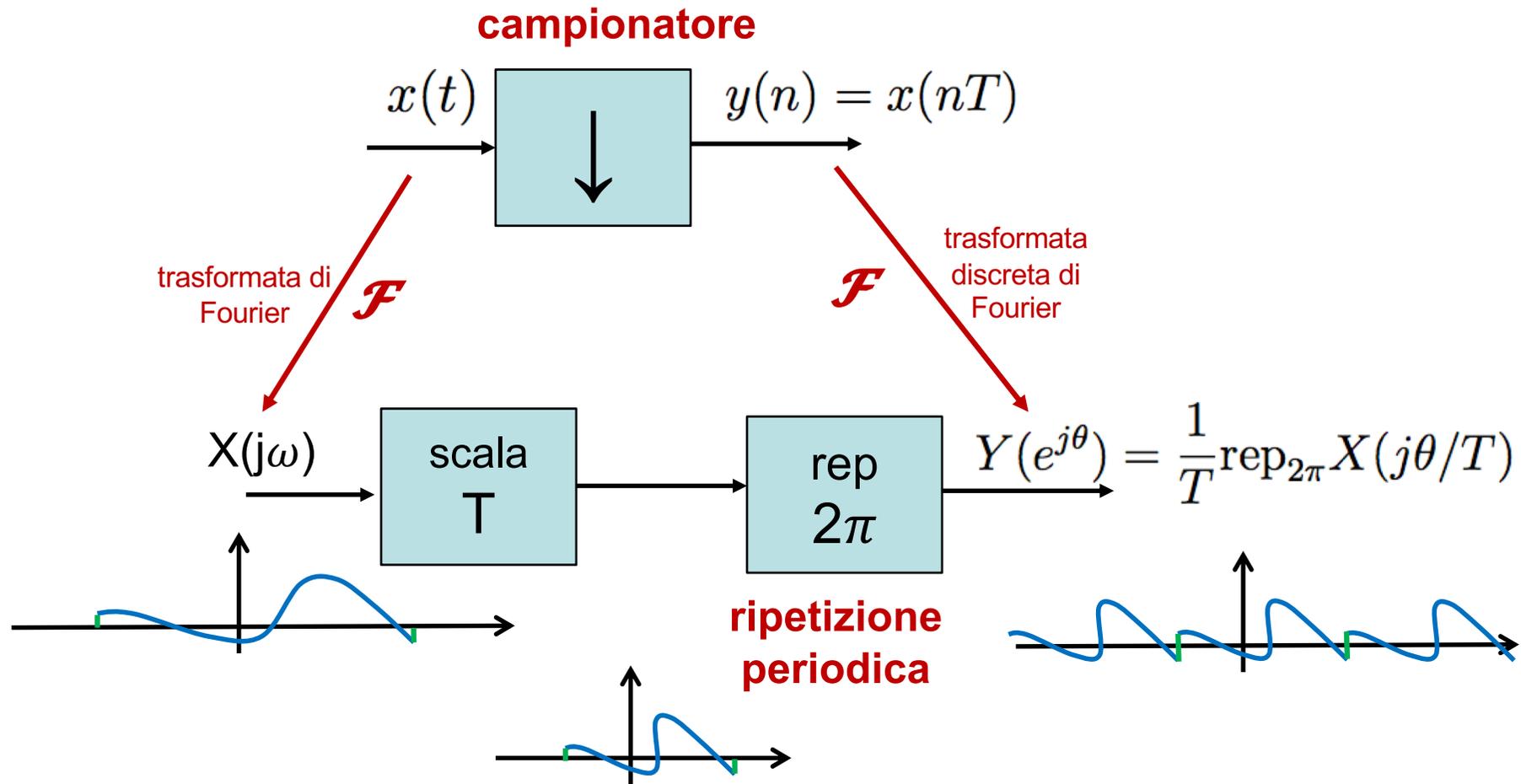
La moltiplicazione per il tempo o derivata nel dominio di Fourier

$$y(n) = nx(n) \quad \Longrightarrow \quad Y(e^{j\theta}) = jX'(e^{j\theta})$$

$$\begin{aligned} Z(e^{j\theta}) = X'(e^{j\theta}) &= \frac{d}{d\theta} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\theta n} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{de^{-j\theta n}}{d\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{-jnx(n)}_{z(n)} \cdot e^{-j\theta n} \end{aligned}$$



Il campionamento come ripetizione periodica nel dominio di Fourier

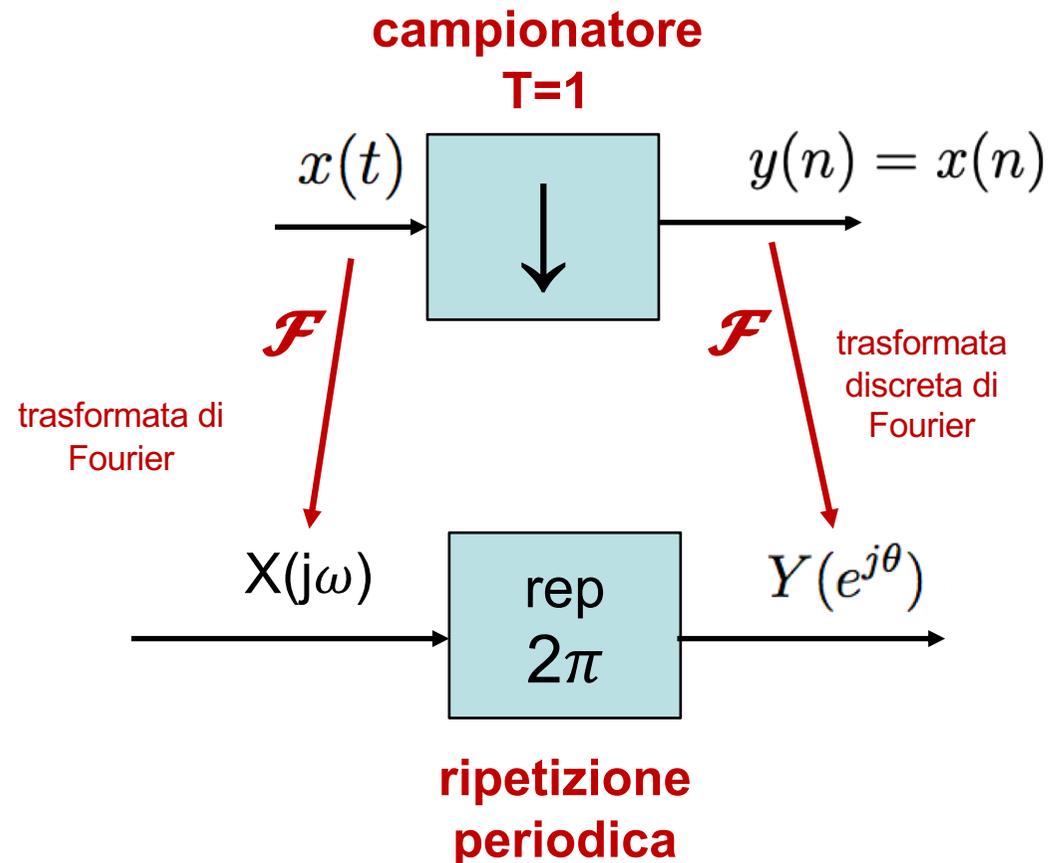




$$\begin{aligned} Y(e^{j\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\theta n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega nT} d\omega \right) e^{-j\theta n} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\theta-\omega T)n} \right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \text{comb}_{2\pi}(\theta - \omega T) d\omega \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\frac{u}{T}) \text{comb}_{2\pi}(\theta - u) du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\frac{u}{T}) \delta(\theta - 2\pi k - u) du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\theta - 2\pi k}{T}\right) \end{aligned}$$



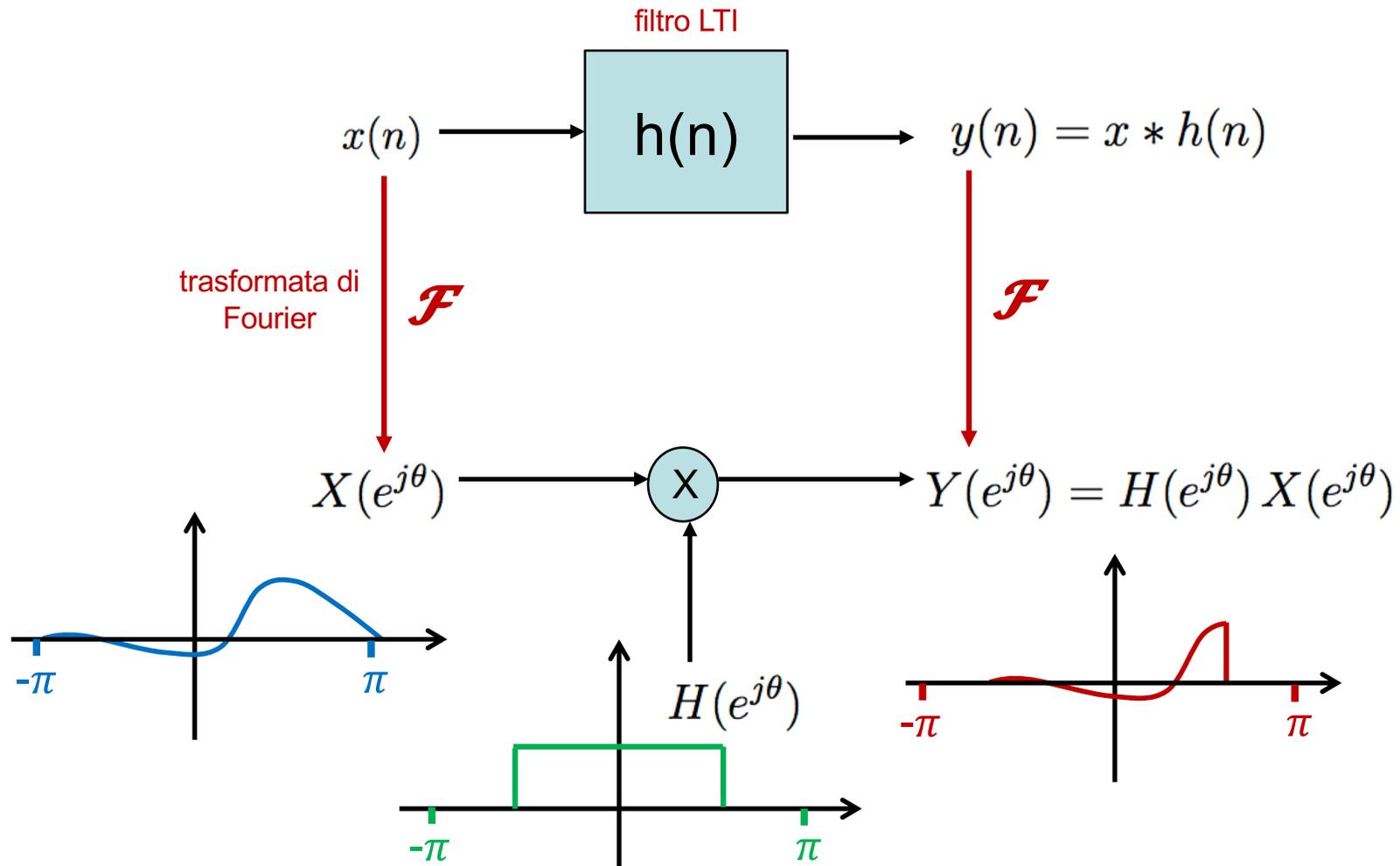
Il campionamento con $T=1$ come ripetizione periodica nel dominio di Fourier





Filtraggio di segnali discreti aperiodici

Interpretazione tramite trasformata di Fourier





Es 1

Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

- l'**impulso** discreto $\delta(n)$
- l'impulso traslato $\delta(n-n_0)$
- il segnale **costante** $s(n) = 1$
- la **sinusoide** $s(n) = A \cos(n\varphi_0 + \varphi_1)$
- il **rettangolo** $s(n) = \text{rect}(n/(2n_0+1))$
- l'esponenziale decrescente $s(n) = a^n 1_0(n)$ con $|a| < 1$
- il segnale **segno** $s(n) = \text{sign}(n)$
- Il **gradino** discreto $1_0(n)$
- Il segnale $s(n) = \text{sinc}(nd)$

Es 2

Calcolare la trasformata di Fourier e l'area del segnale discreto
 $s(n) = n a^n 1_0(n)$ con $|a| < 1$

La Discrete Fourier Transform (DFT)



DFT = discrete Fourier transform

serie di Fourier per segnali discreti periodici

proiezione su una base ortogonale

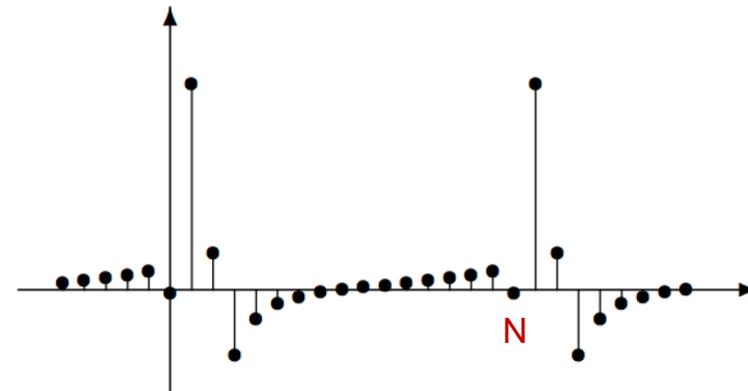
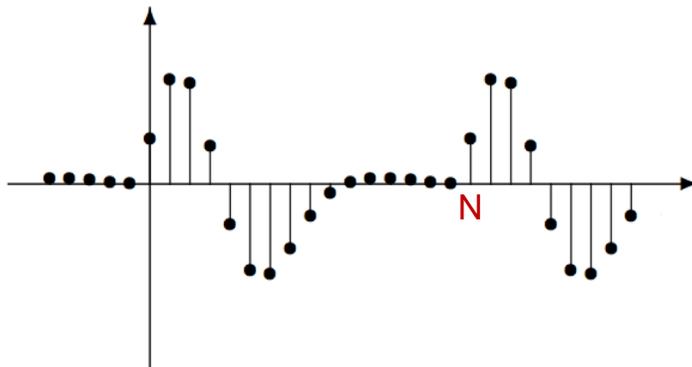
$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{jkn\theta_0}$$

discreto periodico

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-jkn\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$

discreto e periodico

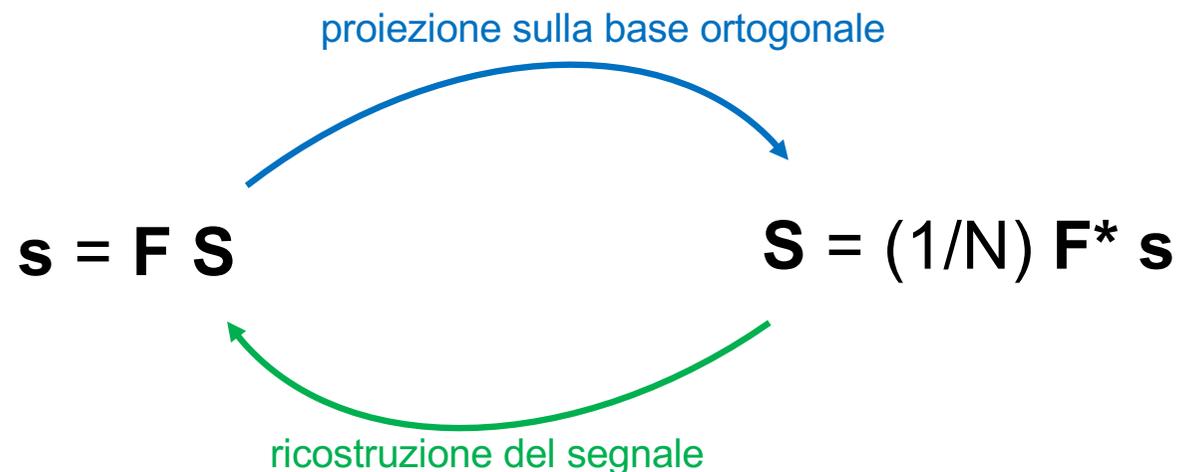
ricostruzione del segnale





$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \omega_N^{0 \cdot 0} & \omega_N^{0 \cdot 1} & \dots & \omega_N^{0 \cdot (N-1)} \\ \omega_N^{1 \cdot 0} & \omega_N^{1 \cdot 1} & \dots & \omega_N^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_N^{(N-1) \cdot 0} & \omega_N^{(N-1) \cdot 1} & \dots & \omega_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix} \quad \omega_N = e^{2\pi i/N}$$

Le colonne formano una base ortogonale per un vettore complesso di lunghezza N





discreto
periodico

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{jkn\theta_0}$$

DFT

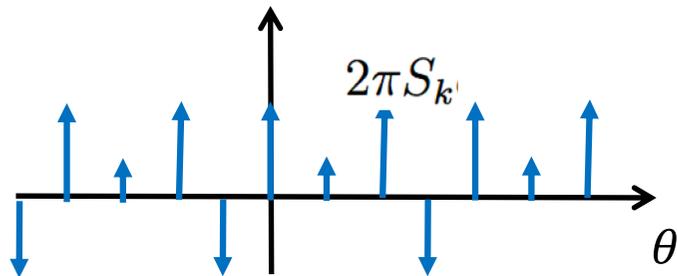
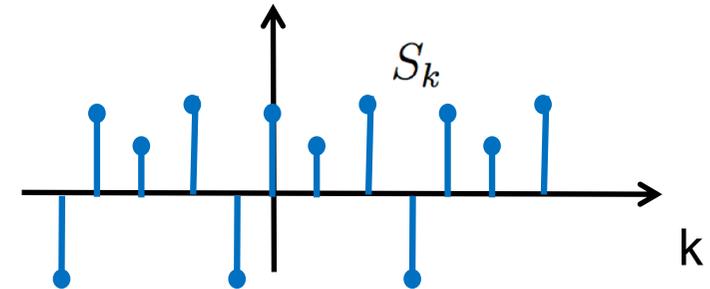
\mathcal{F}

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-jkn\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$

trasformata
dicreta di Fourier

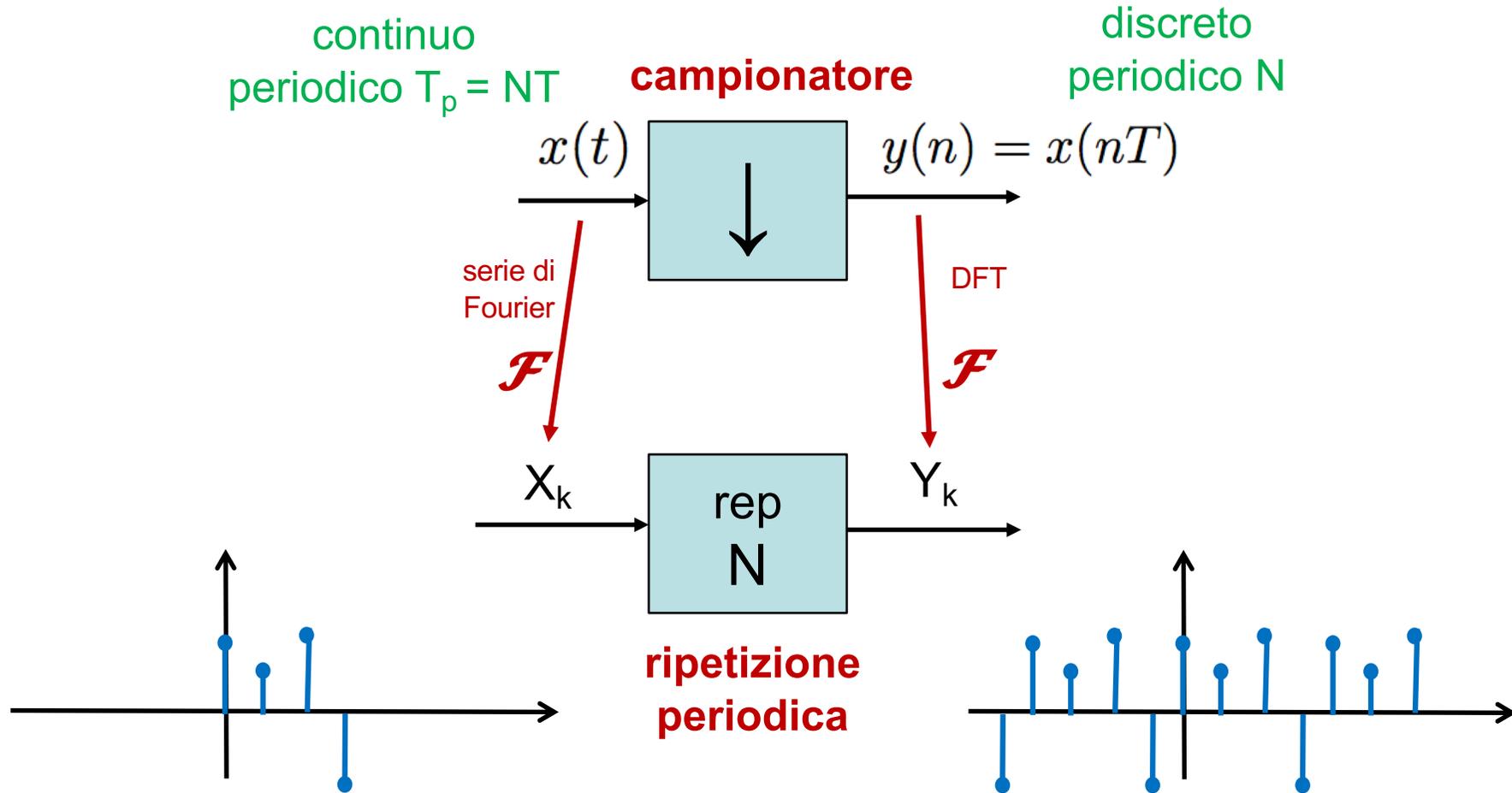
\mathcal{F}

$$\tilde{S}(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi S_k \text{comb}(\theta - k\theta_0)$$





Il campionamento di segnali periodici come ripetizione periodica nel dominio di Fourier



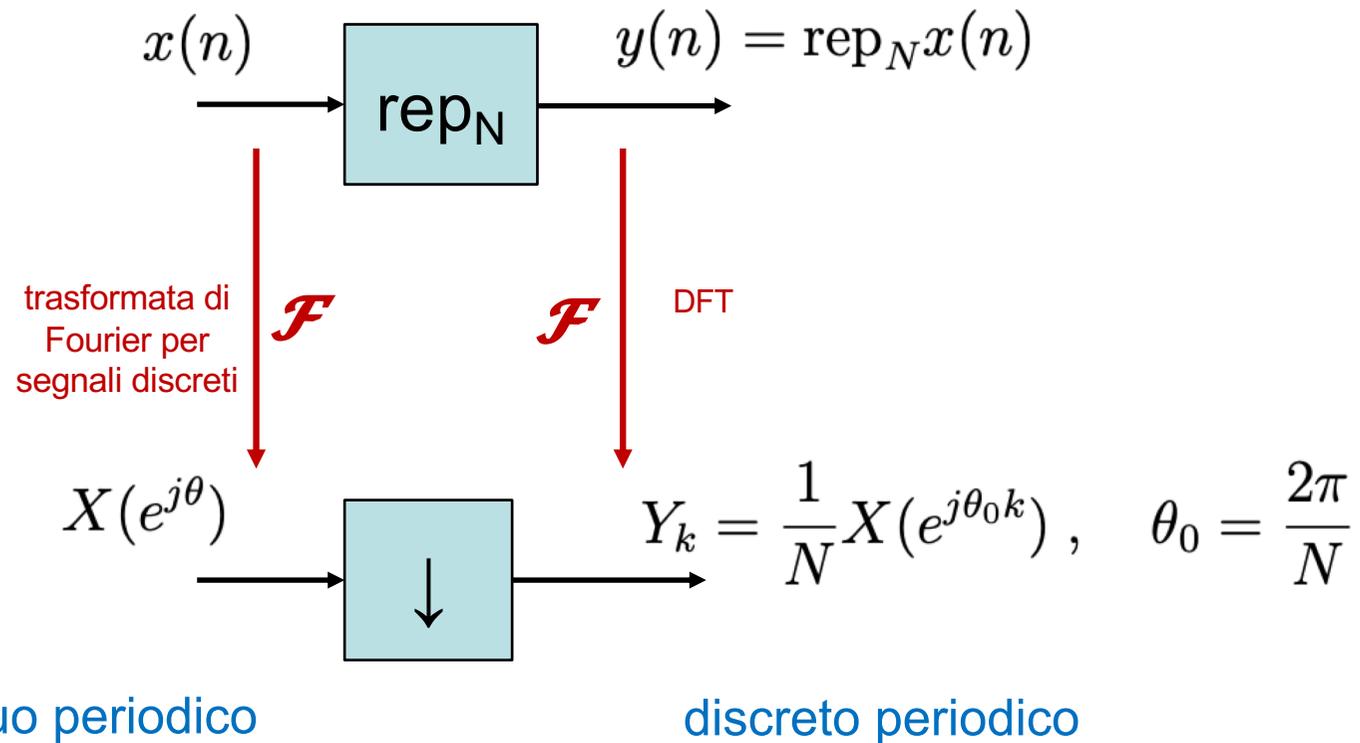


La periodizzazione di segnali discreti

quale è la DFT di una ripetizione periodica?

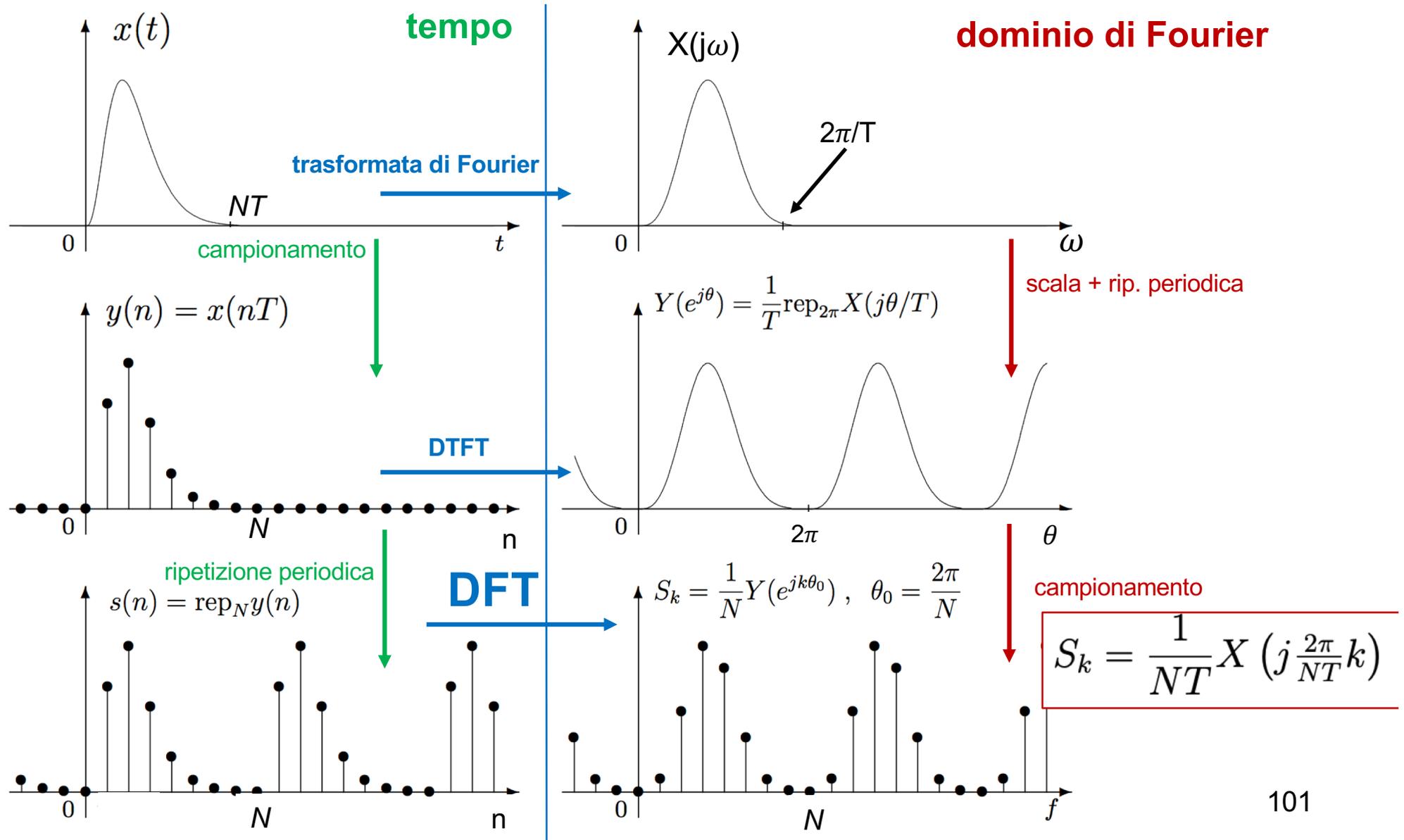
discreto aperiodico

discreto periodico





Legame tra le trasformate di Fourier



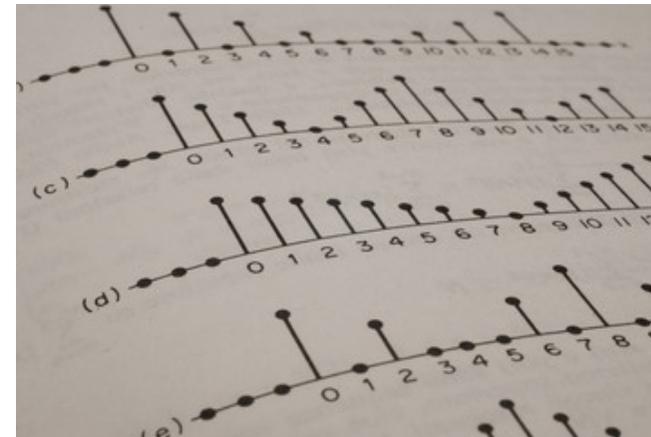
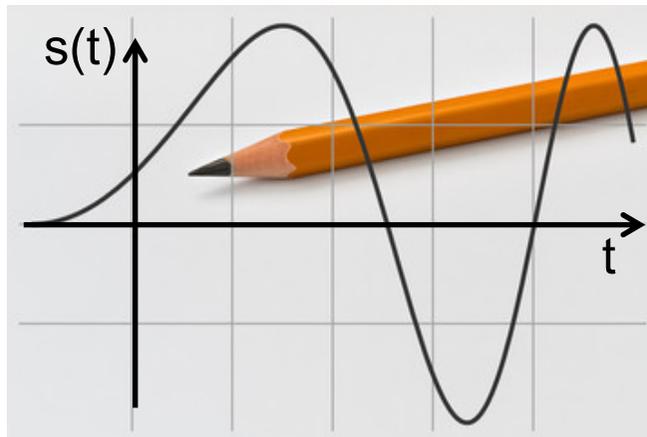
Le trasformata di Fourier a confronto



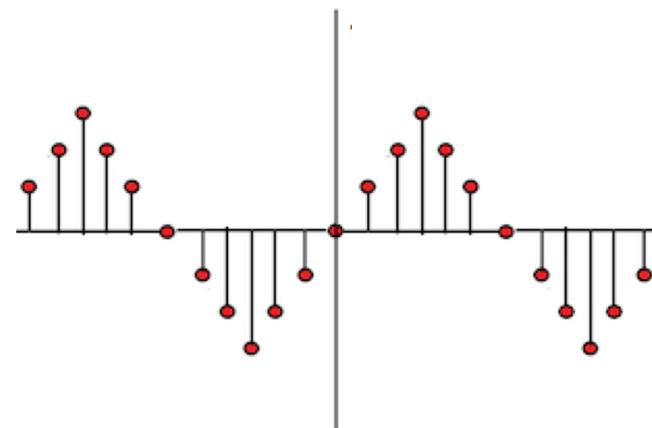
continui

discreti

campionamento



ripetizione periodica



aperiodici

periodici



tempo continuo

tempo discreto

frequenza continua

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$$

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j\theta n}$$

tempo aperiodico

frequenza discreta

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{jkn\theta_0}$$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-jkn\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$

tempo periodico

frequenza aperiodica

frequenza periodica



Area, Energia, Valor medio, Potenza

Le 4 classi di trasformazioni di Fourier

tempo continuo

tempo discreto

frequenza continua

$$S(j0) = A_s \quad s(0) = A_S$$

$$E_s = E_S$$

$$S(e^{j0}) = A_s \quad s(0) = m_S$$

$$E_s = P_S$$

tempo aperiodico

frequenza discreta

$$S_0 = m_s \quad s(0) = A_S$$

$$P_s = E_S$$

frequenza aperiodica

$$S_0 = m_s \quad s(0) = m_S N$$

$$P_s = P_S N$$

frequenza periodica

tempo periodico



Traslazione e modulazione

Le 4 classi di trasformazioni di Fourier

tempo continuo

tempo discreto

frequenza continua

$$x(t - t_0) \Rightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \Rightarrow X(j\omega - j\omega_0)$$

$$\overline{x(n - n_0)} \Rightarrow X(e^{j\theta})e^{-j\theta n_0}$$

$$x(n)e^{j\theta_0 n} \Rightarrow Y(e^{j(\theta - \theta_0)})$$

tempo aperiodico

frequenza discreta

$$x(t - t_1) \Rightarrow X_k e^{-jk\omega_0 t_1}$$

$$x(t)e^{jm\omega_0 t} \Rightarrow \overline{X_{k-m}}$$

$$\overline{x(n - n_0)} \Rightarrow X_k e^{-jk n_0 \theta_0}$$

$$x(n)e^{jk_0 n \theta_0} \Rightarrow X_{k-k_0}$$

tempo periodico

frequenza aperiodica

frequenza periodica



Convoluzione

Le 4 classi di trasformazioni di Fourier

tempo continuo

tempo discreto

frequenza continua

$$x * y(t) \Rightarrow X(j\omega)Y(j\omega)$$

$$x(t)y(t) \Rightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right) X * Y(j\omega)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \Rightarrow X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$$

$$x(n)y(n) \Rightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} X(e^{j(u-\theta)})Y(e^{ju})du$$

tempo aperiodico

frequenza discreta

$$\left(\frac{1}{T_p}\right) \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-u)y(u)du \Rightarrow X_k Y_k$$

$$x(t)y(t) \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m Y_{k-m}$$

frequenza aperiodica

$$\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n-k) \Rightarrow X_k Y_k$$

$$x(n)y(n) \Rightarrow \sum_{m=0}^{N-1} X_m Y_{k-m}$$

frequenza periodica

tempo periodico

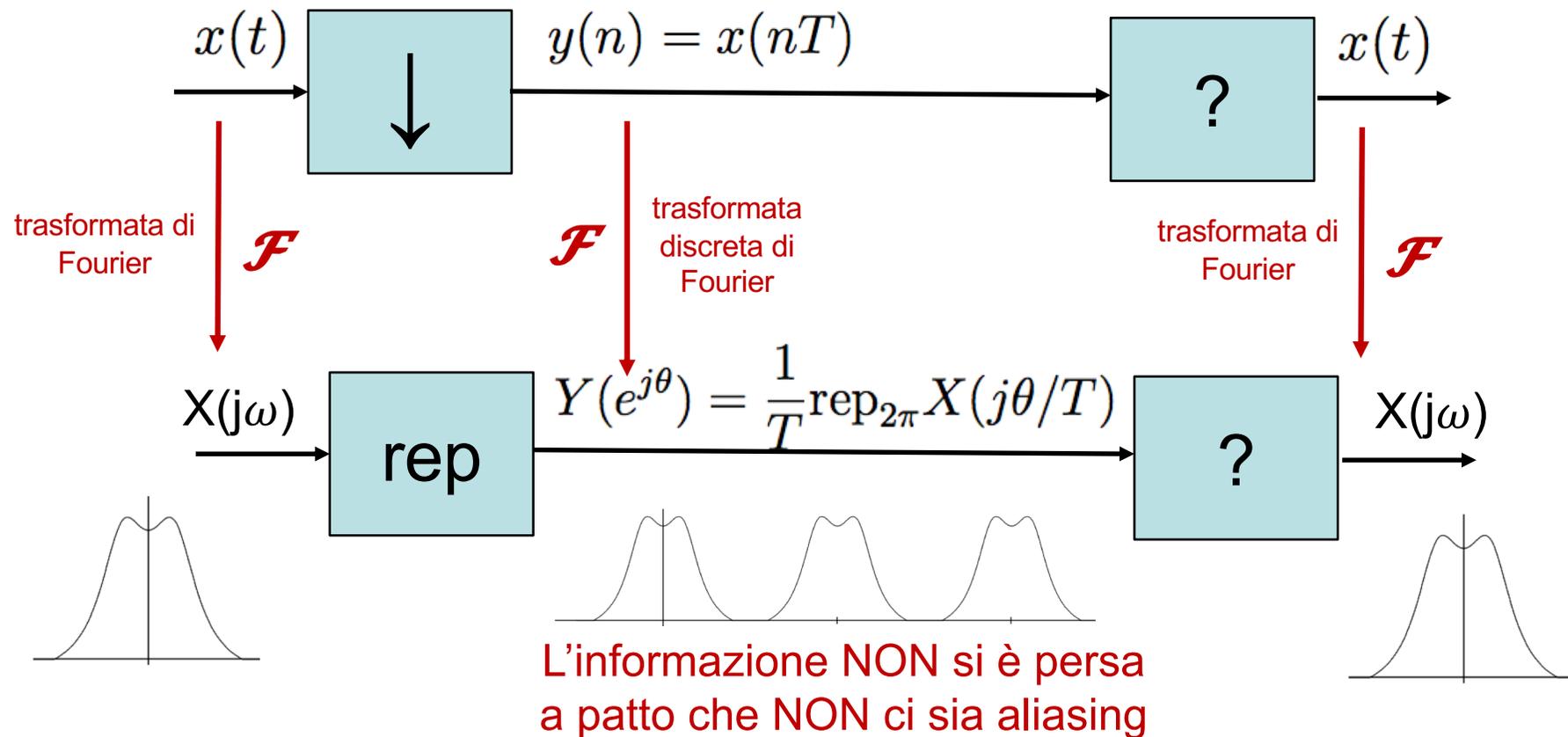
Il teorema del campionamento

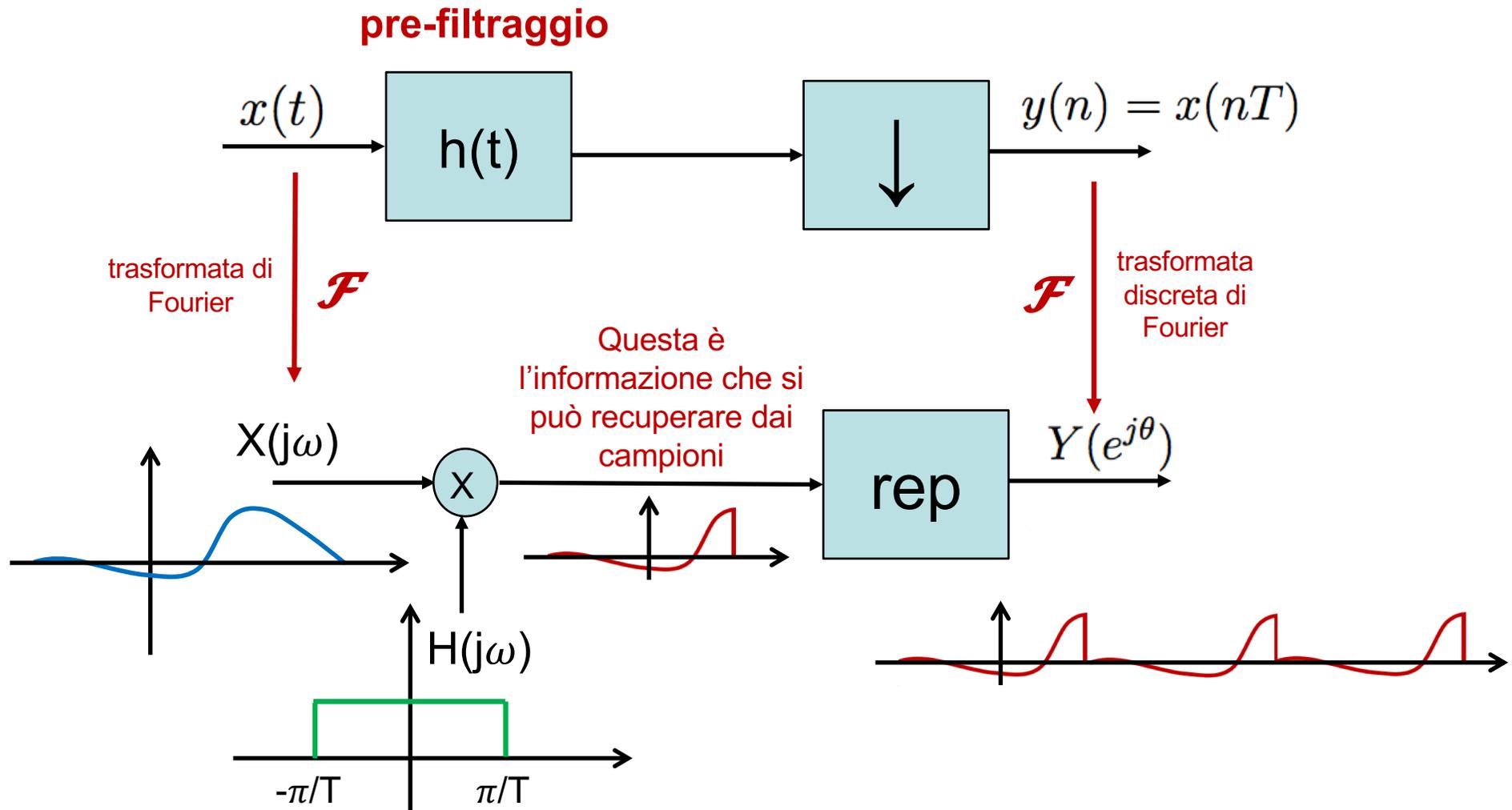
Ovvero la relazione continuo/discreto



Ricostruire un segnale dai campioni

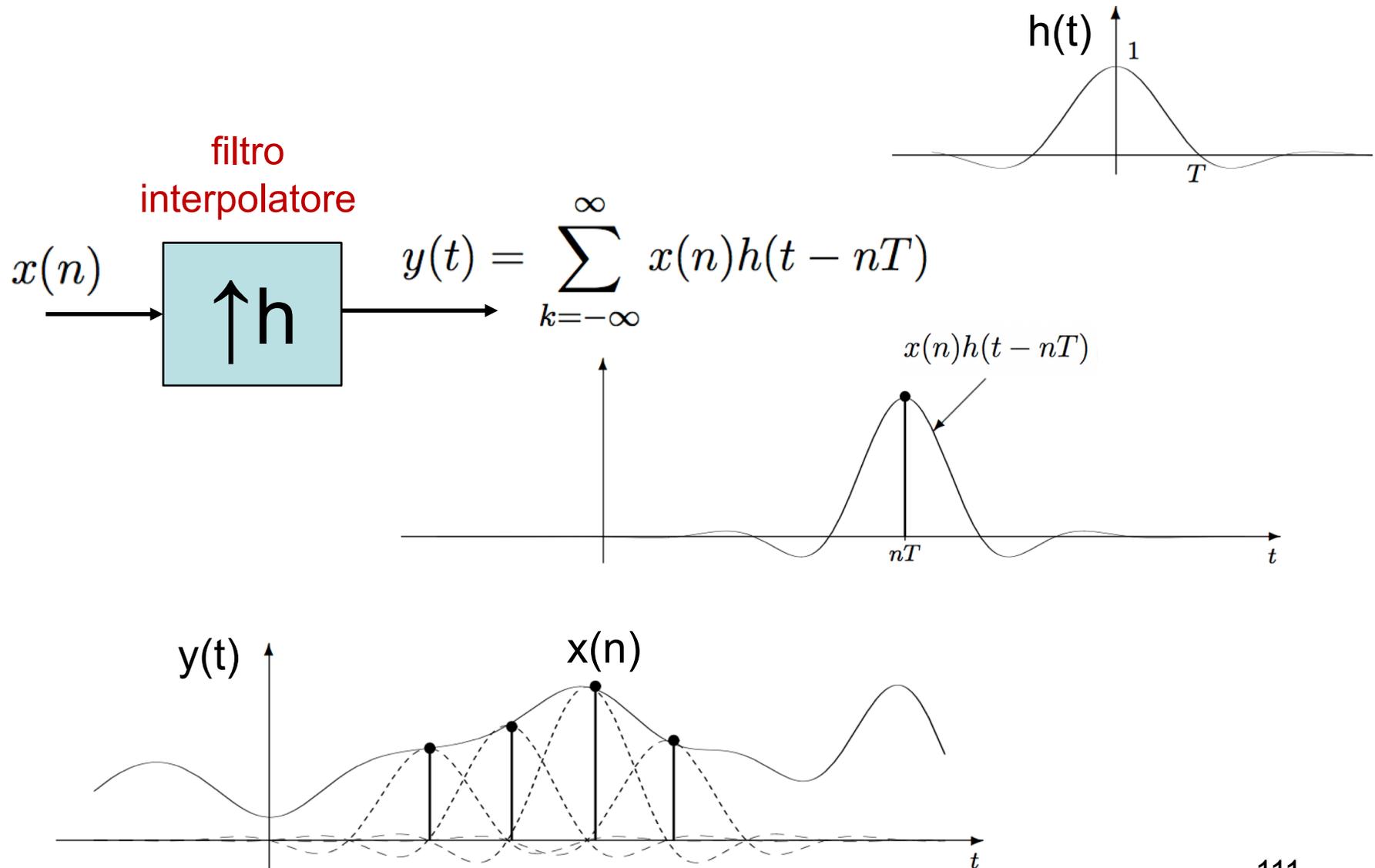
Invertibilità del campionamento







L'interpolazione come raccordo dei campioni di un segnale



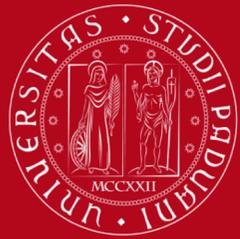


Condizione di corretta interpolazione

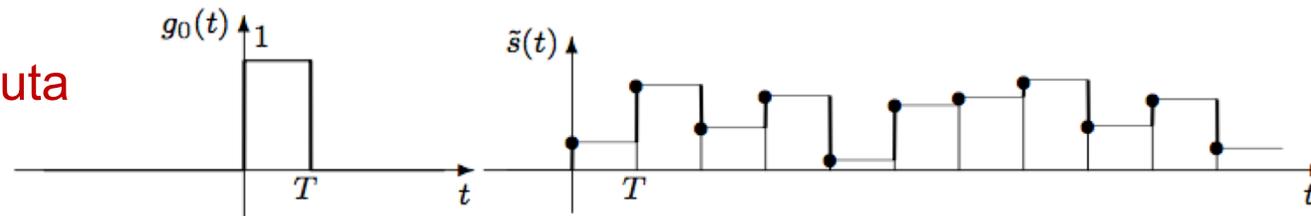
perché sia un vero raccordo

$$y(nT) = x(n) \implies h(nT) = \delta(n)$$

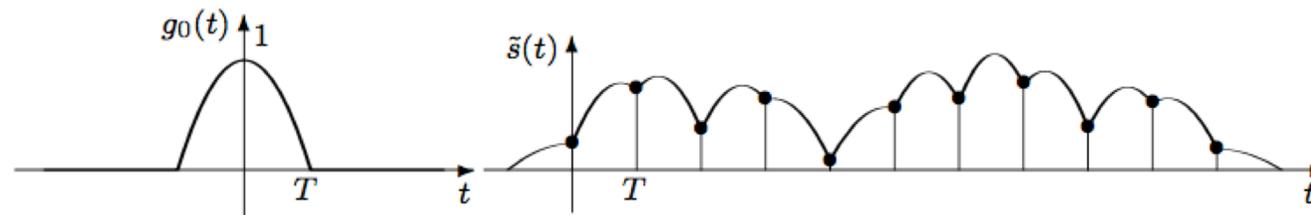
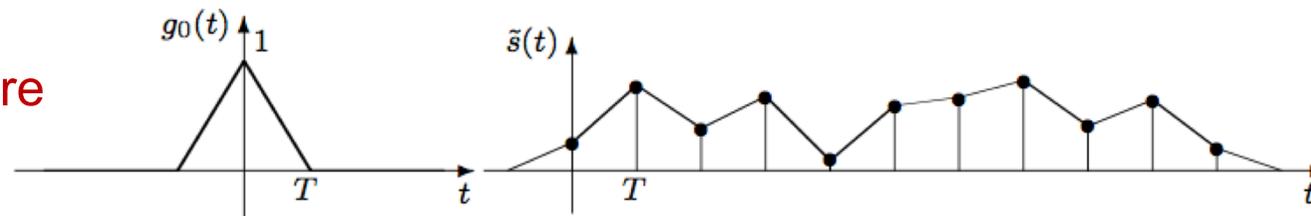
$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(t - kT) \\ &= h(0)x(n) + \sum_{k \neq n} x(k)h((n - k)T) \\ &= h(0)x(n) + \sum_{m \neq 0} x(n - m)h(mT) \end{aligned}$$



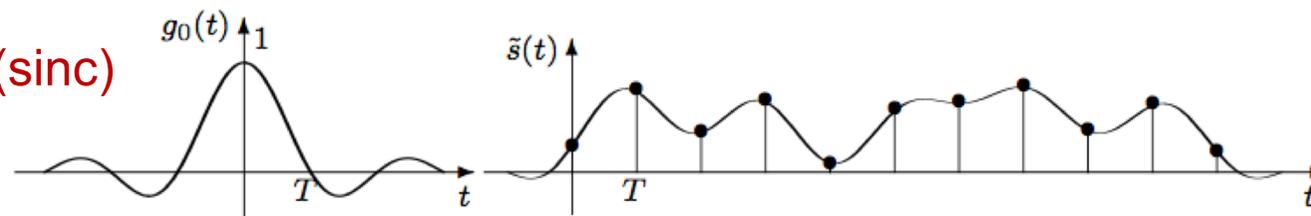
A tenuta



Lineare



Ideale (sinc)



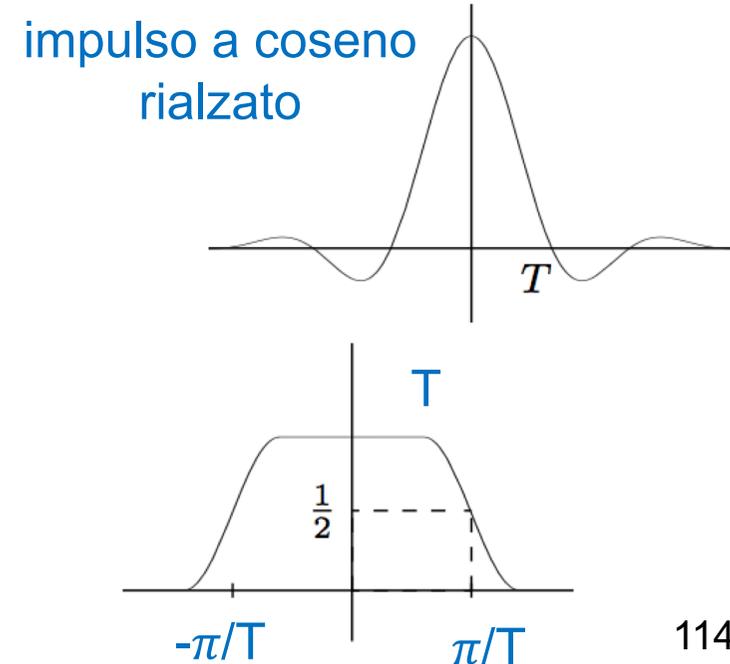
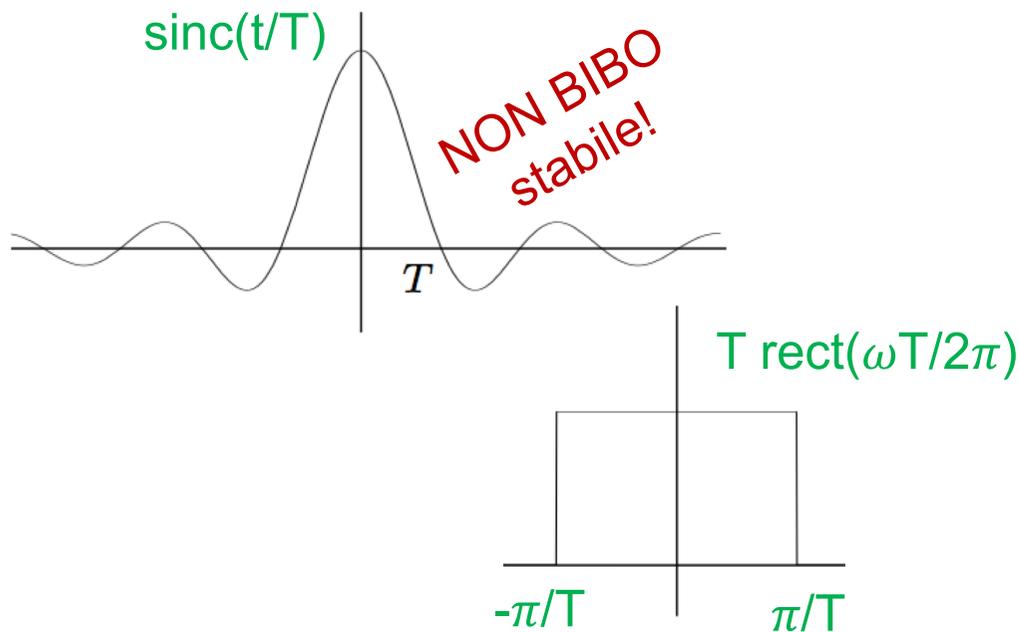


Corretta interpolazione in frequenza

A volte più semplice

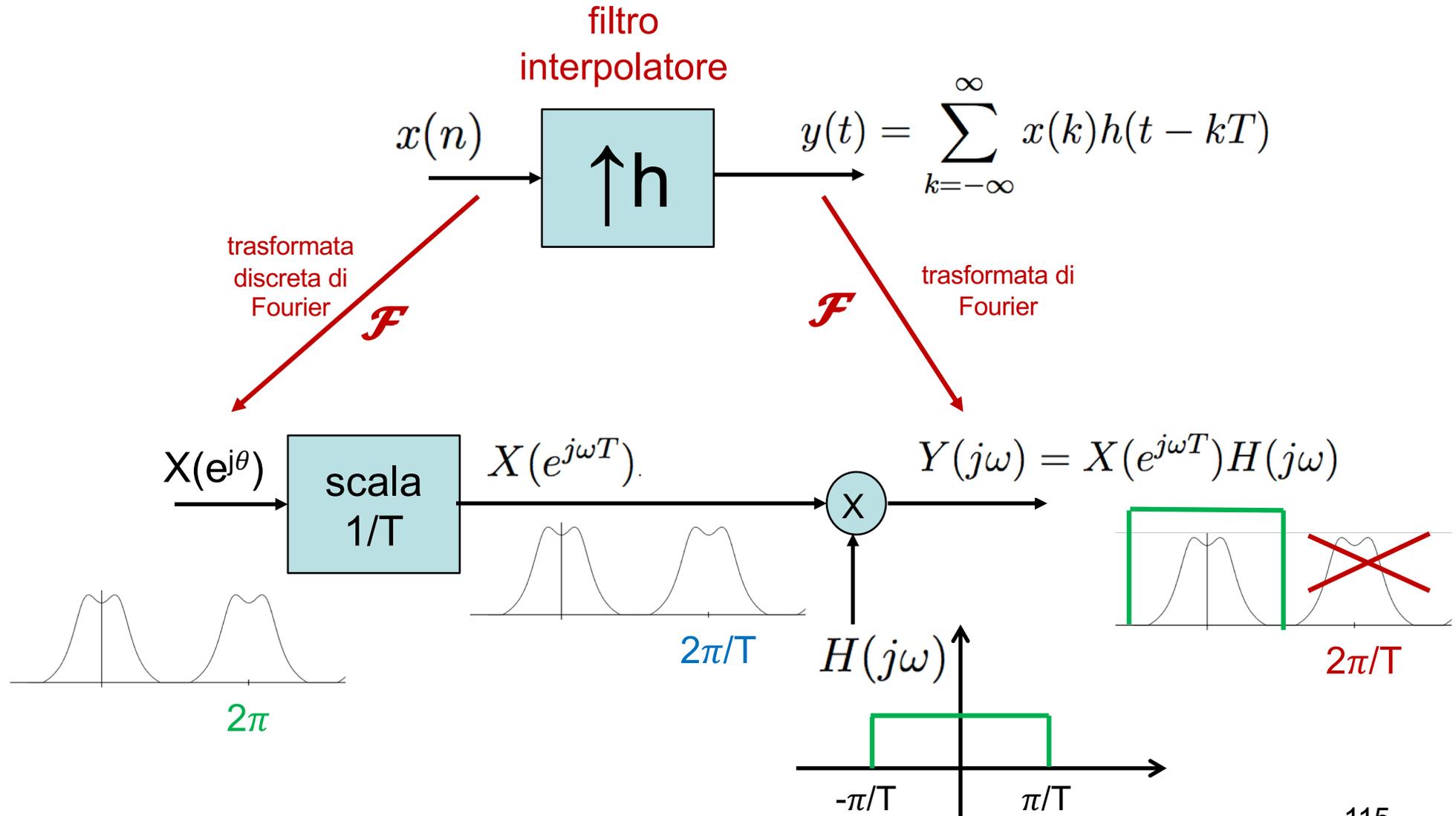
$$h(nT) = \delta(n) \implies \frac{1}{T} \text{rep}_{2\pi} H(j\theta/T) = 1$$

$$\implies \text{rep}_{2\pi/T} H(j\omega) = T$$





L'interpolazione in frequenza come scala e filtraggio

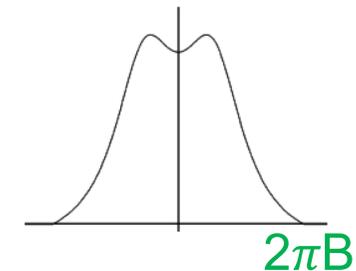




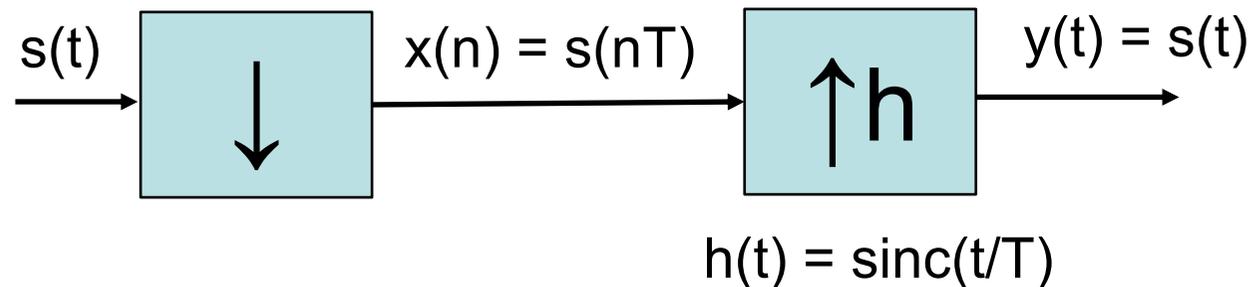
$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(t - kT) \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t - kT)e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)H(j\omega)e^{-j\omega kT} \\ &= X(e^{j\omega T})H(j\omega) \end{aligned}$$

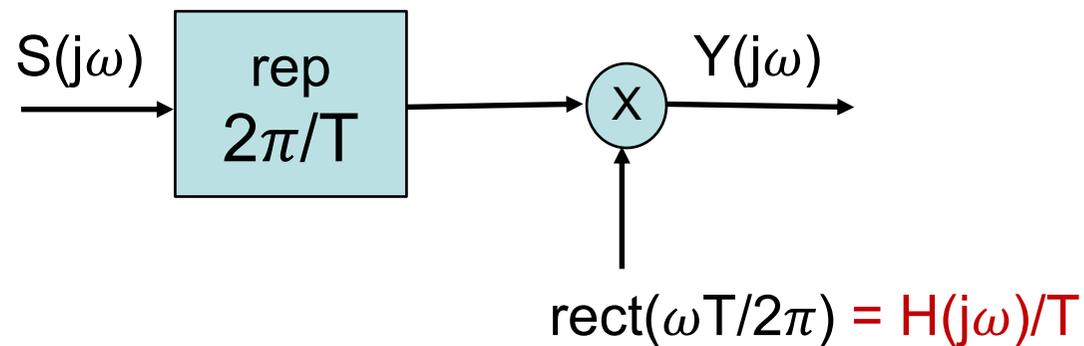
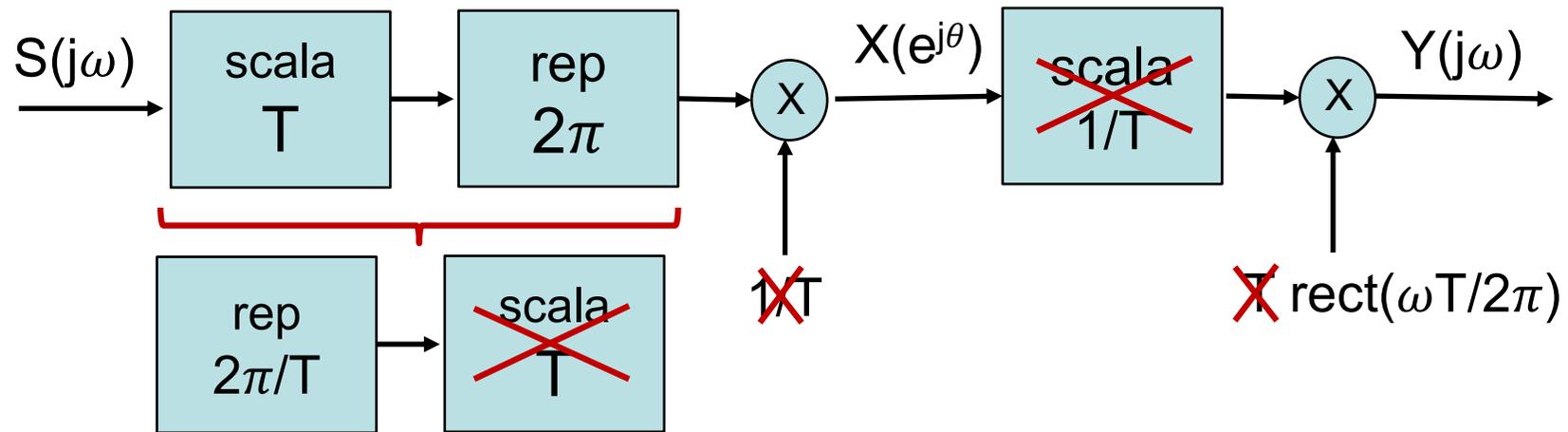


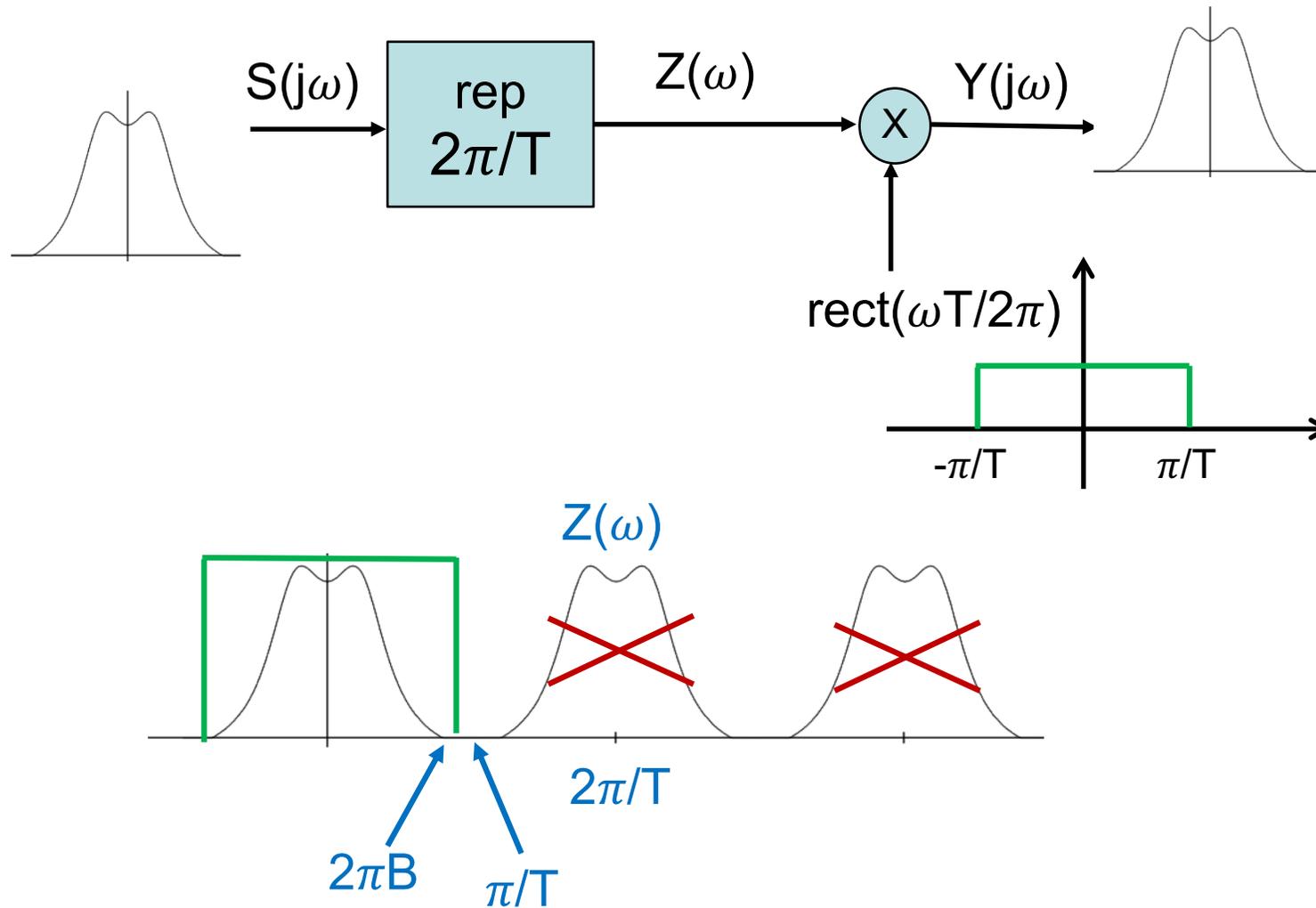
Un segnale continuo $s(t)$ limitato in pulsazione nella banda $[-2\pi B, 2\pi B]$ si può ricostruire dai propri campioni $s(nT)$ se il passo di campionamento soddisfa $T < 1/(2B)$



$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \text{sinc}((t - kT)/T)$$







No aliasing se $2\pi B < \pi/T$, ovvero $T < 1/2B$



Es 1

Proporre uno schema di ricostruzione del segnale $s(t) = \text{sinc}^3(t)$ dai suoi campioni

Es 2

Proporre uno schema di ricostruzione di $s(t) = \text{sinc}^2(t) e^{j19\pi t/2}$ dai campioni che utilizzi il maggior passo possibile di campionamento

Es 3

Calcolare l'uscita con $X(j\omega) = [1 - \text{triang}(\omega/2\pi)] \text{rect}(\omega/4\pi)$

