UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Segnali e Sistemi

(canale 2)

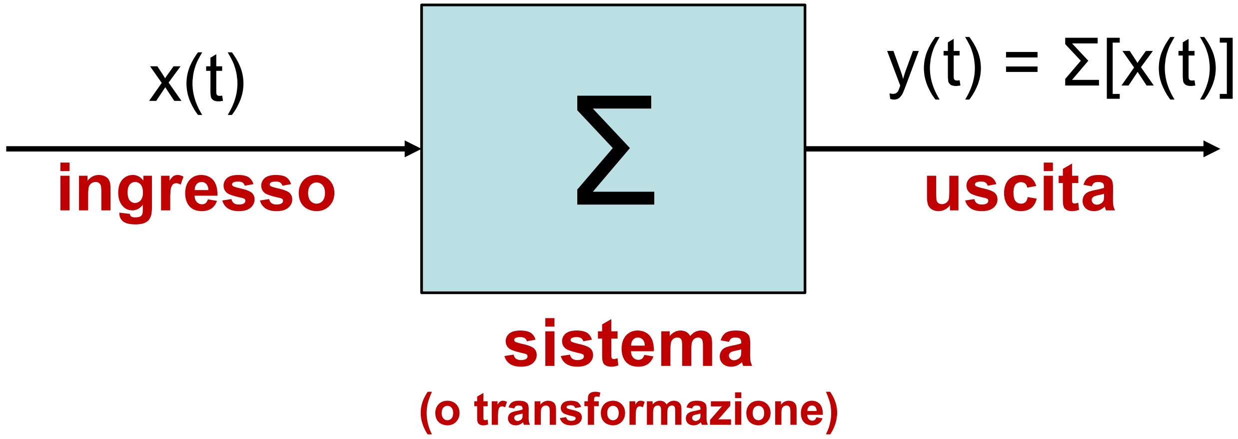
Laurea in Ing. Biomedica

Anno II, secondo semestre, A.A. 21/22

Classificazione dei sistemi

terminologia

Modello di sistema



$$\Sigma : S_{in} \rightarrow S_{out}$$

spazio dei segnali in ingresso

spazio dei segnali in uscita

Sistemi continui/discreti/ibridi

In base alla tipologia dei segnali

continuo

$S_{continuo} \rightarrow S_{continuo}$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$$

integratore

discreto

$S_{discreto} \rightarrow S_{discreto}$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

somma corrente

ibrido

$S_{discreto} \rightarrow S_{continuo}$

$S_{continuo} \rightarrow S_{discreto}$

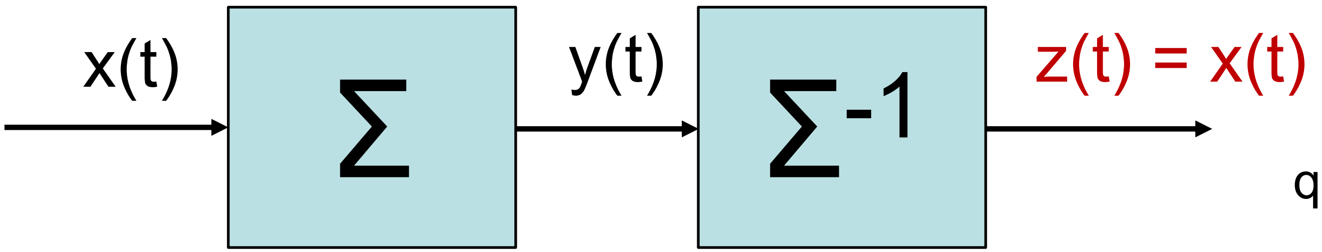
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\downarrow} \longrightarrow y(n) = x(nT)$$

campionatore

Sistemi invertibili

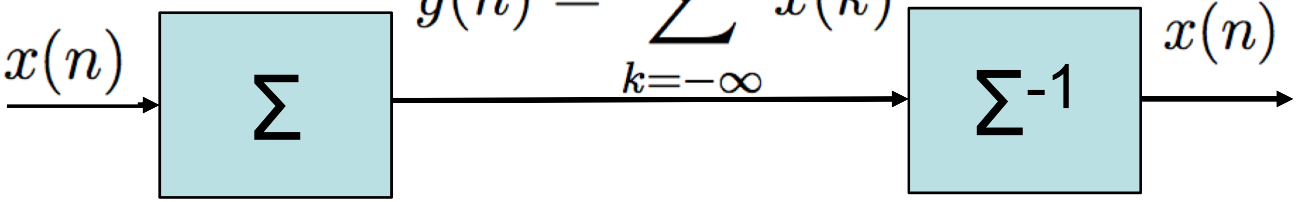
Concetto legato alla classe di segnali in ingresso

trasformazione inversa



invertibile se l'equivalenza vale per qualsiasi scelta di x in S_{in}

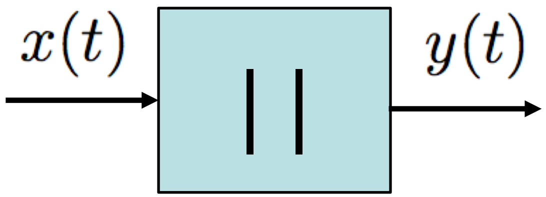
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$



somma corrente

invertibile

$$x(n) = y(n) - y(n-1)$$

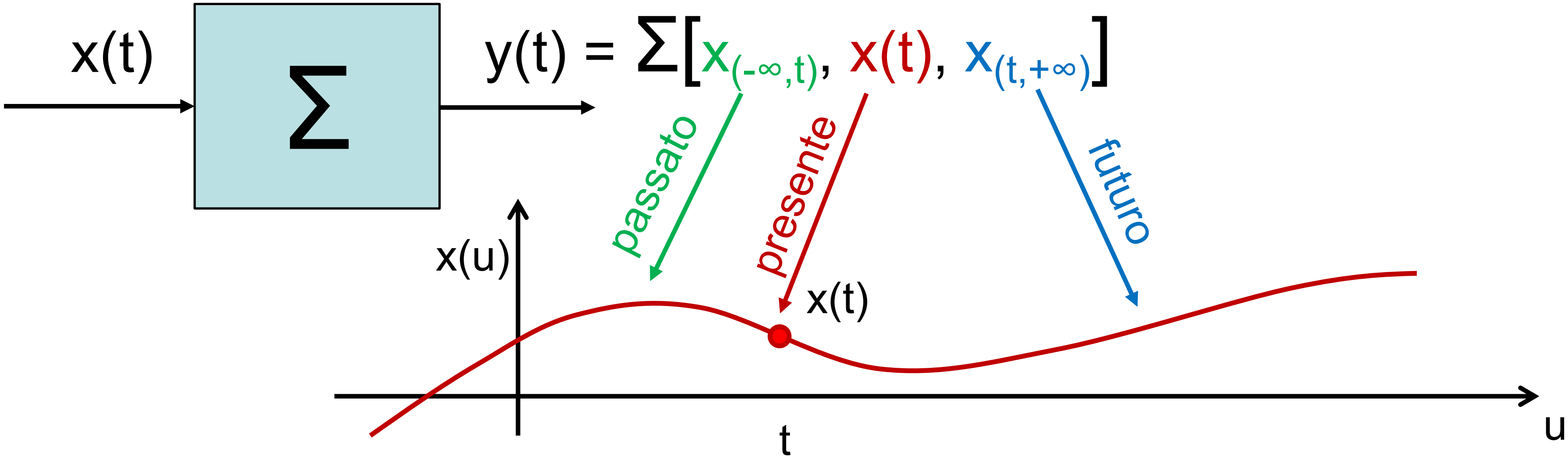


valore assoluto

$$y(t) = |x(t)|$$

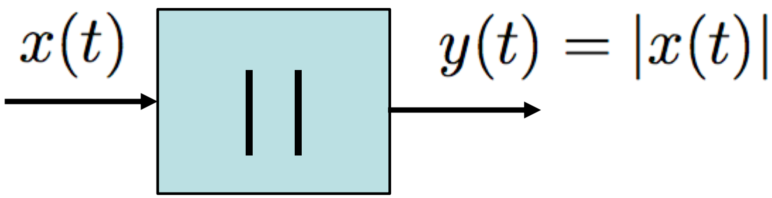
non invertibile a meno che S_{in} non sia la classe di segnali a valori reali non negativi

Memoria di un sistema
e sistemi istantanei



istantaneo (senza memoria, statico)

$$y(t) = \Sigma[x(t)]$$

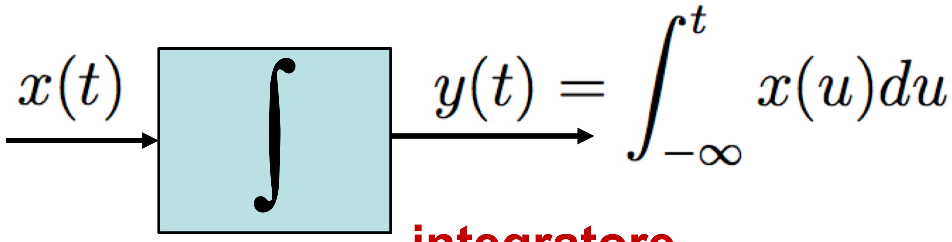


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Memoria di un sistema

Causale (con memoria, dinamico)

$$y(t) = \Sigma[x_{(-\infty,t)}, x(t)]$$



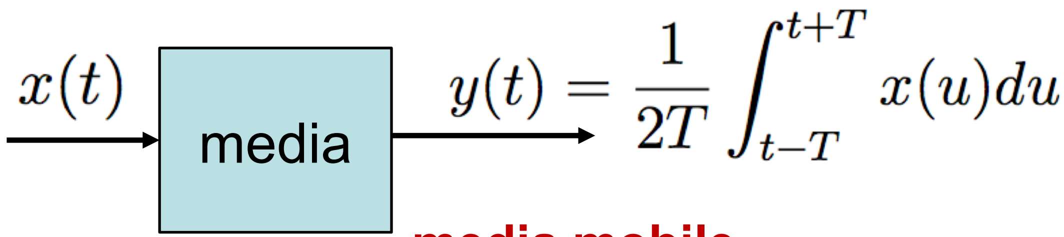
integratore

Anticausale (con memoria, dinamico)

$$y(t) = \Sigma[x(t), x_{(t,+\infty)}]$$

A memoria finita

$$y(t) = \Sigma[x_{[t1,t2]}]$$

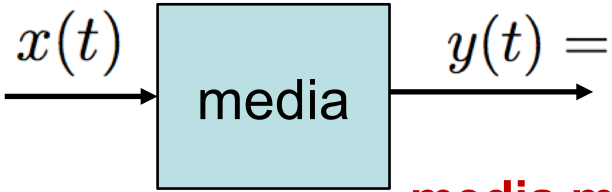


media mobile

Stabilità BIBO

bounded input – bounded output

se ad ogni ingresso limitato nelle ampiezze, **$|x(t)|<L_x$**
corrisponde un'uscita limitata nelle ampiezze, **$|y(t)|<L_y$**



$$y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(u)du$$

media mobile

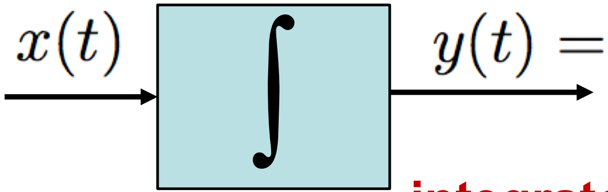
è BIBO stabile

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left|\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(u)du\right| \\ &\leq \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} |x(u)|du \\ &\leq \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} L_x du = L_x \end{aligned}$$

Stabilità BIBO

bounded input – bounded output

se ad ogni ingresso limitato nelle ampiezze, **$|x(t)|<L_x$**
corrisponde un'uscita limitata nelle ampiezze, **$|y(t)|<L_y$**



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$$

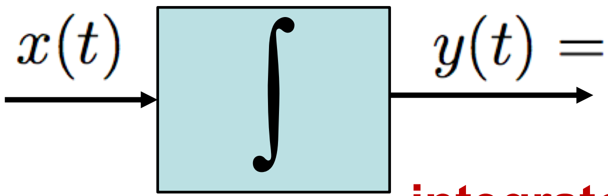
integratore

NON è BIBO stabile

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{t} 1(u)du = t \cdot 1(t) \end{aligned}}$$

con un controesempio x(t)=1(t)
si dimostra che l'uscita diverge

se ad ogni ingresso **a valori reali**
corrisponde un'uscita **a valori reali**



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$$

integratore

Sistemi lineari

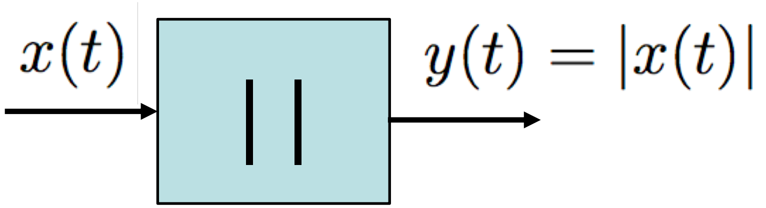
principio di sovrapposizione degli effetti

$$\boxed{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \overset{\Sigma}{\Longrightarrow} \quad \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)}$$

linearità = additività + omogeneità

$$\boxed{x_1(t) + x_2(t) \quad \overset{\Sigma}{\Longrightarrow} \quad y_1(t) + y_2(t)}$$

$$\boxed{\alpha x(t) \quad \overset{\Sigma}{\Longrightarrow} \quad \alpha y(t)}$$



valore assoluto

non additivo

$$|x_1(t) + x_1(t)| \neq |x_1(t)| + |x_2(t)|$$

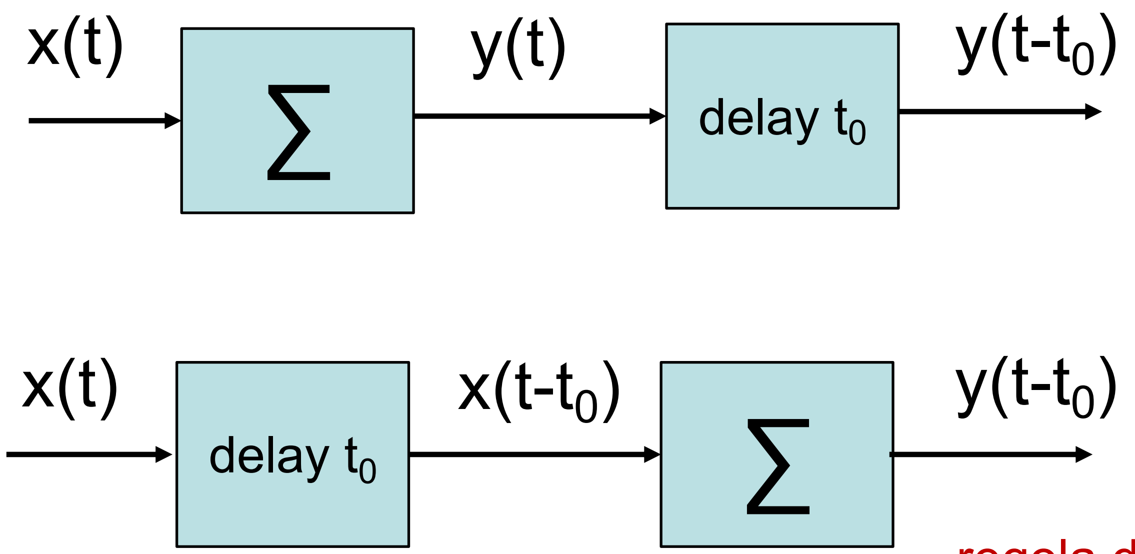
non omogeneo

$$|\alpha x(t)| \neq \alpha |x(t)|$$

Tempo invarianza

principio di ripetibilità dell'esperimento

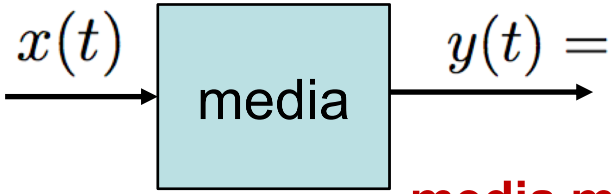
$$x(t - t_0) \quad \overset{\Sigma}{\Longrightarrow} \quad y(t - t_0)$$



regola di commutatività tra la trasformazione e l'operazione di traslazione nel tempo

Verifica della tempo invarianza

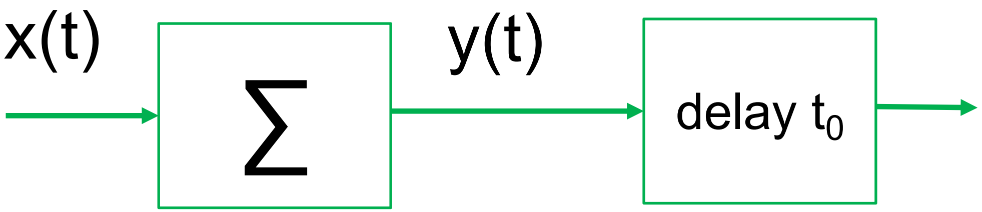
esempio con la media mobile



$$y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(u)du$$

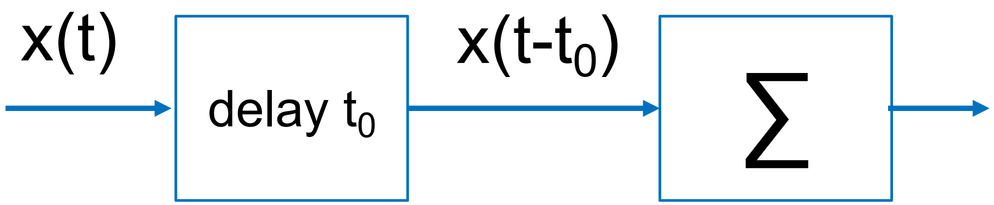
media mobile

valuto l'uscita con $t-t_0$ al posto di t



$$\frac{1}{2T}\int_{t-t_0-T}^{t-t_0+T} x(u)du$$

valuto l'uscita con $x(t-t_0)$ al posto di x(t)



$$\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(u-t_0)du$$

tempo invariante

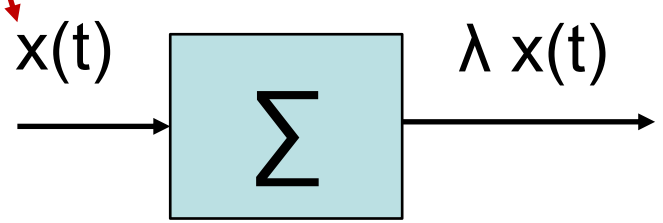
si vede che sono uguali con un cambio di variabile

Definizioni importanti

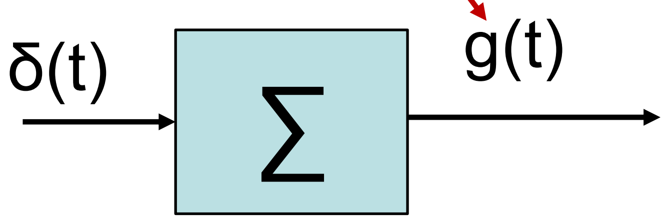
Autofunzione e risposta impulsiva

autofunzione

autovalore



risposta impulsiva



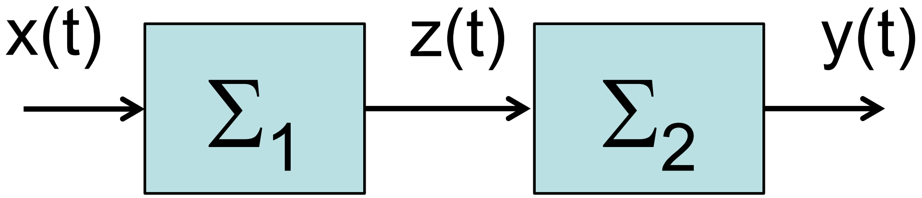
uscita corrispondente ad
una sollecitazione
tramite impulso ideale

anche $\delta(n) \rightarrow g(n)$

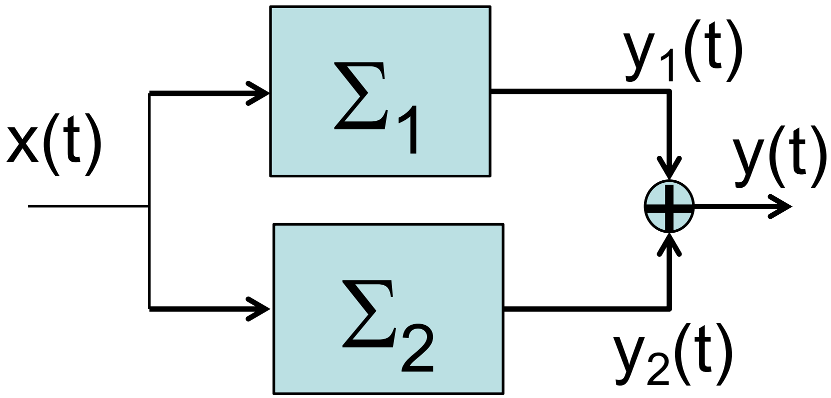
Connessioni di sistemi

serie, parallelo, con retroazione

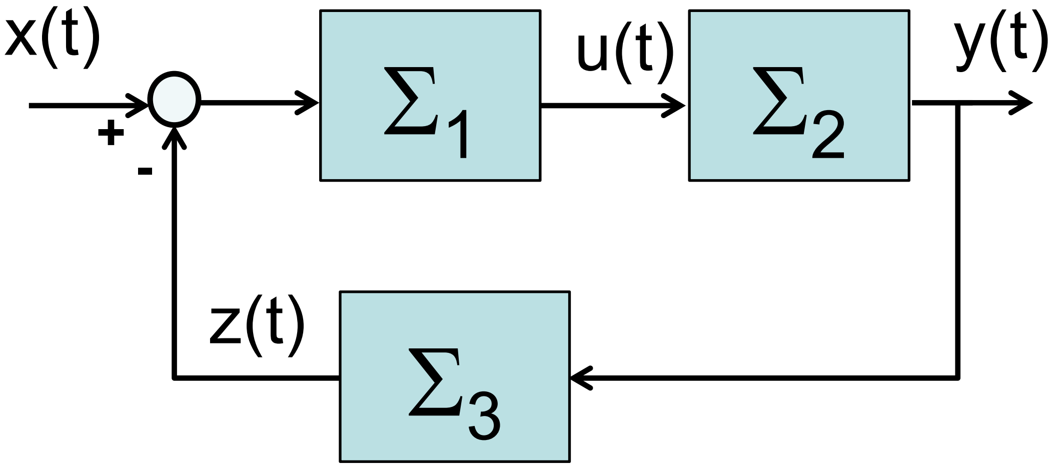
serie/cascata



parallelo



retroazione



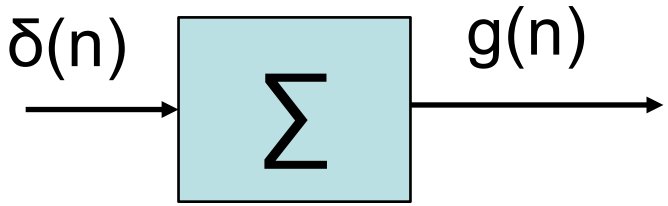
Sistemi LTI

LTI = lineari tempo invarianti

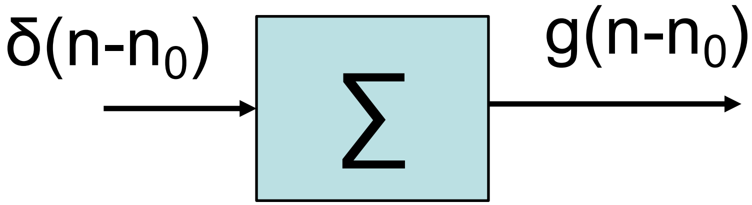
Sistemi LTI discreti

proprietà fondamentali degli impulsi

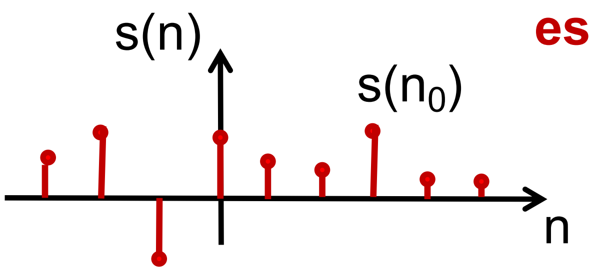
risposta impulsiva



proprietà di tempo invarianza



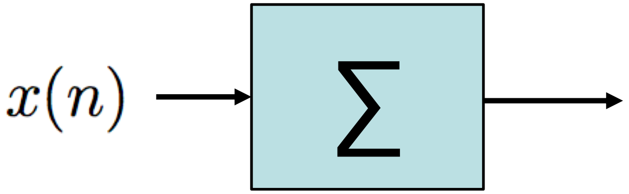
espressione alternativa di un segnale



$$s(n) = \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} s(n_0)\delta(n-n_0)$$

Sistemi LTI discreti

relazione ingresso uscita



$$y(n) = \Sigma\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

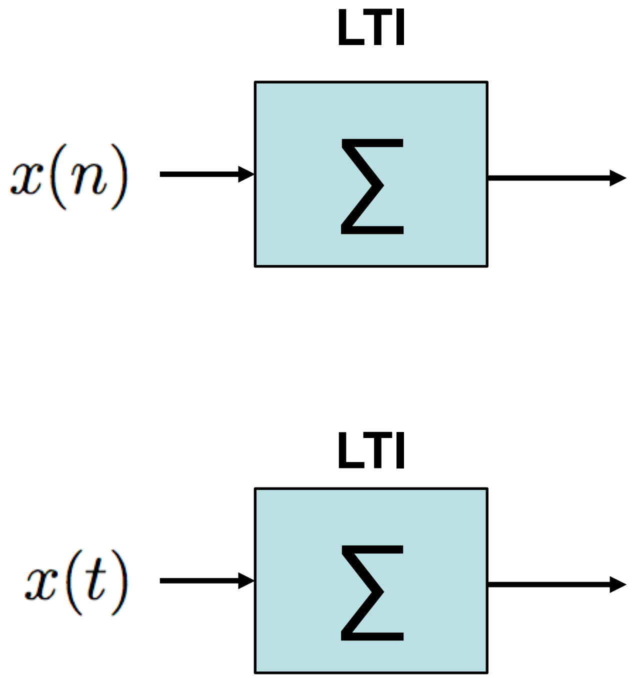
sfrutto la linearità
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\Sigma\left[\delta(n-k)\right]$$

convoluzione

sfrutto la tempo invarianza
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(n-k)$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

La convoluzione
nel discreto e nel continuo



la relazione ingresso-uscita dipende solo dalla risposta impulsiva g(n)

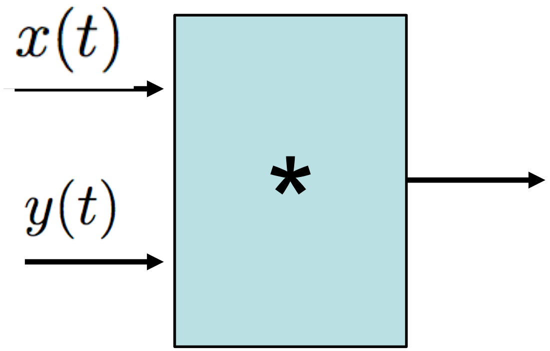
$$y(nT) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)g(nT - kT)$$

limite per T → 0$^+$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)g(t-u)du$$

La convoluzione nel continuo

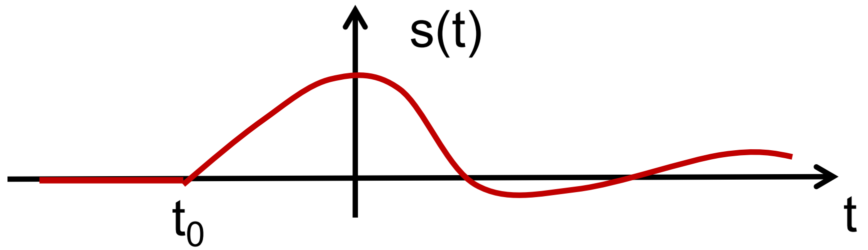
notazione



$$z(t) = x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du$$

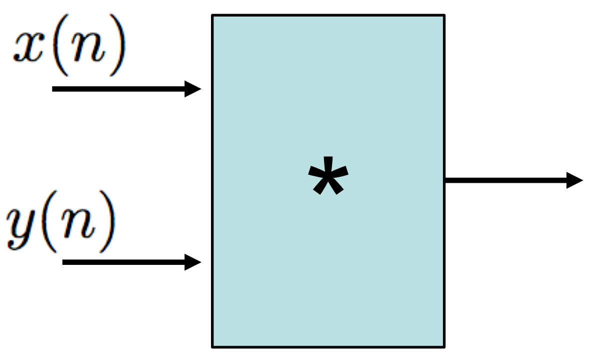
Operazione ben definita per:

1. Segnali ad **energia finita**
2. Segnali **causali** o loro traslazioni



La convoluzione nel discreto

notazione



$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

stessa struttura

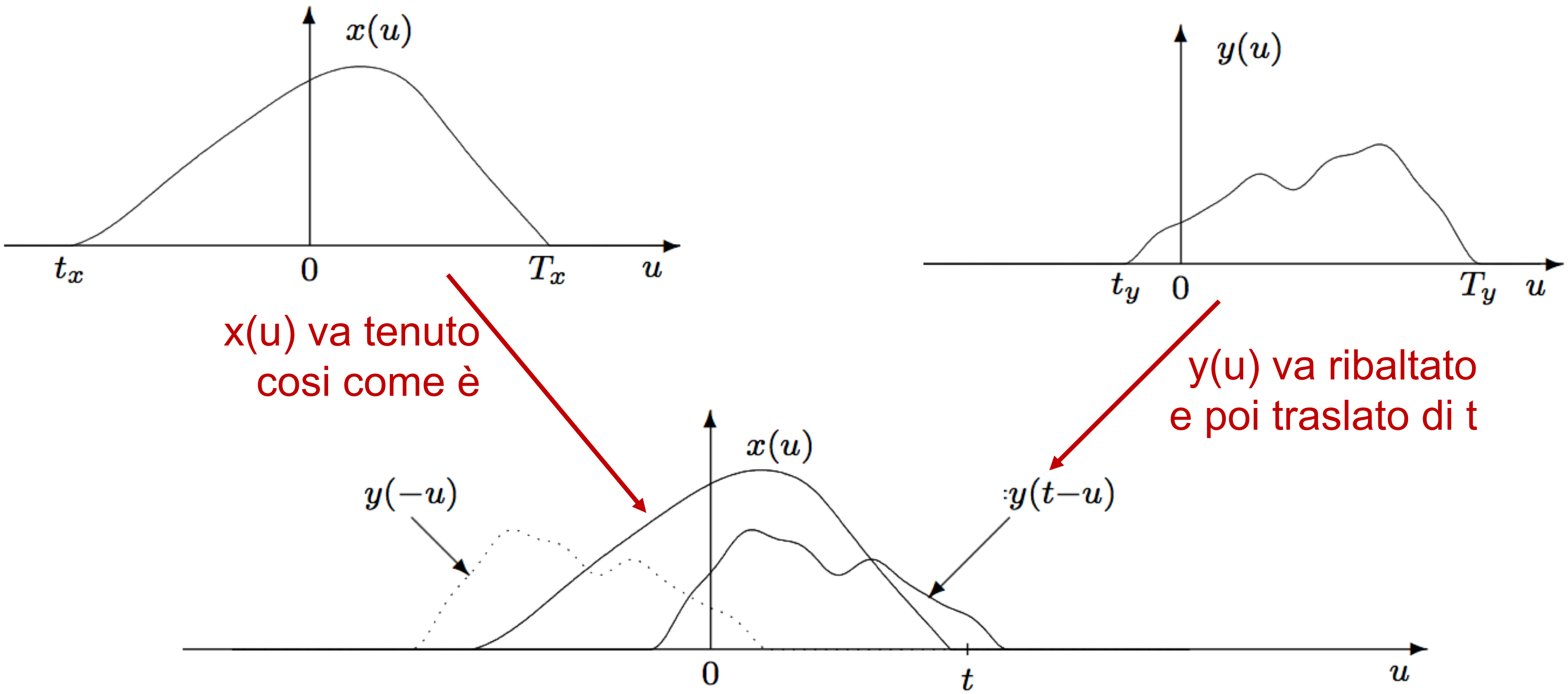
stessa interpretazione

$$y_{-}(k-n)$$

Stesse proprietà

Interpretazione della convoluzione

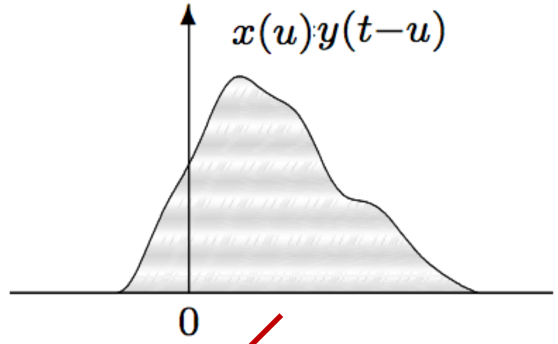
$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, \underbrace{y(t-u)}_{y_-(u-t)}\, du$$



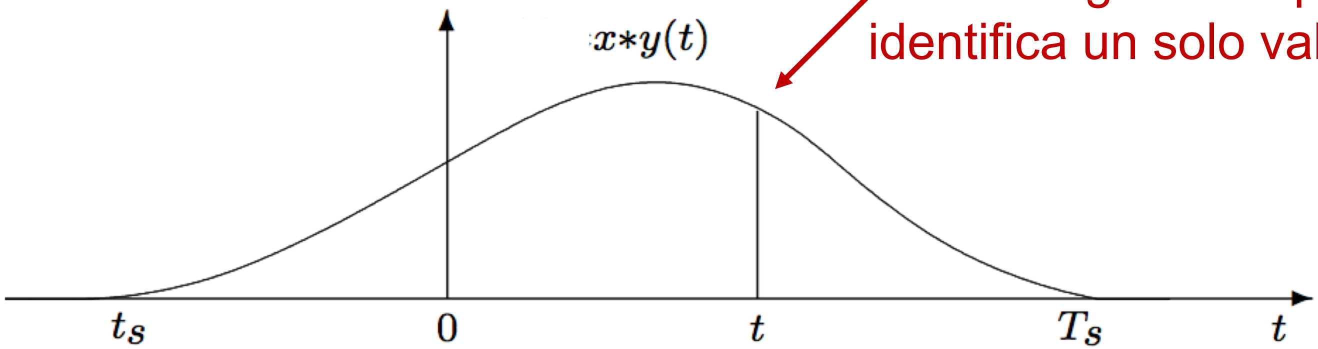
Interpretazione della convoluzione

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, \underbrace{y(t-u)}_{y_-(u-t)}\, du$$

il risultato del prodotto



l’integrale del prodotto
identifica un solo valore di t



Esercizi

alcuni risolti assieme, altri per casa

Es 1

Calcolare la convoluzione tra il segnale $x(t) = A + \cos(2\pi f_0 t)$ ed il segnale $y(t) = e^{-a\,t}\,1(t)$ con $a>0$

Es 2

Calcolare la convoluzione tra un rettangolo di base 4D ed uno di base 2D

Es 3

Dimostrare che rect*rect(t)=triang(t)

Es 4

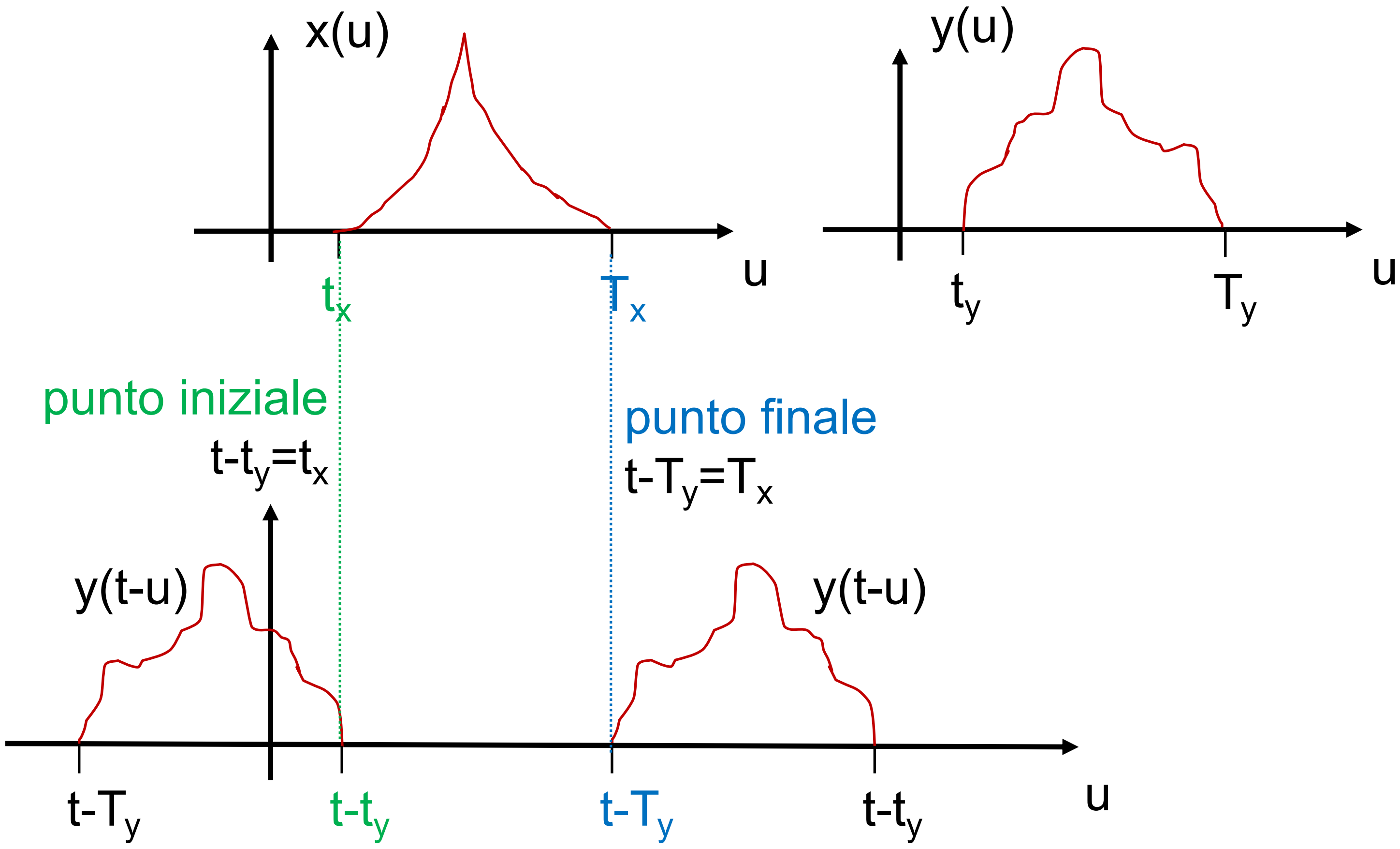
Dimostrare che la convoluzione tra un rettangolo di base T_1 ed uno di base T_2 (con $T_2 < T_1$) restituisce un trapezio di base maggiore T_1+T_2 e base minore T_1-T_2

Proprietà della convoluzione

durata, linearità, associatività, commutatività, area, traslazione, elemento neutro, etc

Estensione della convoluzione continua

Somma istanti iniziali e finali



Estensione

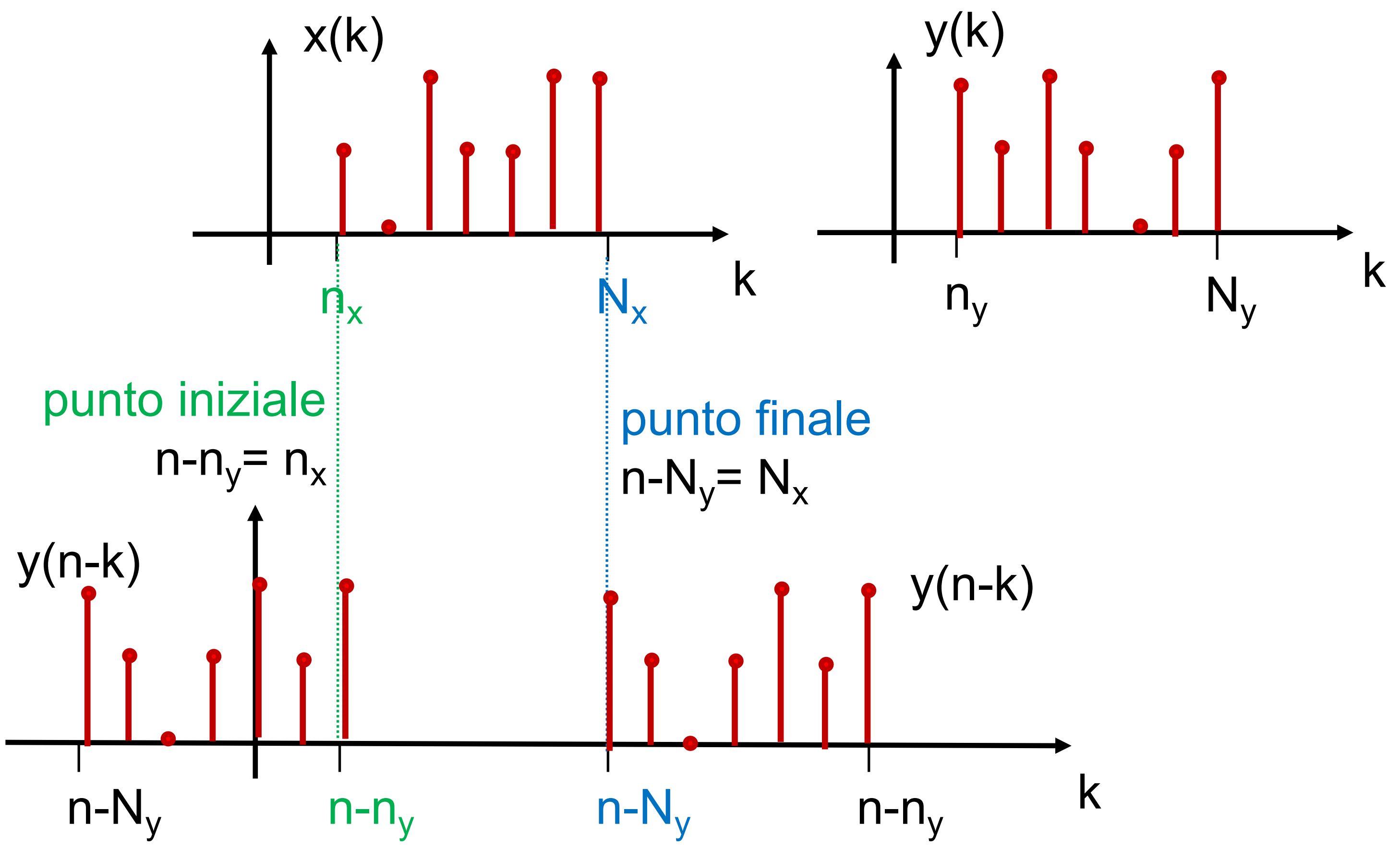
$e(x*y) = [t_x+t_y, T_x+T_y]$

Durata

$D_{x*y} = D_x + D_y$

Estensione della convoluzione discreta

somma istanti iniziali e finali



Estensione $e(x*y) = [n_x+n_y, N_x+N_y]$

Linearità ed associatività
della convoluzione continua

Linearità

$$(A\,x + B\,y) * z = A\,x*z + B\,y*z$$

$$x * (A\,y + B\,z) = A\,x*y + B\,x*z$$

Associatività

$$x * (y * z) = (x * y) * z = x * y * z$$

Commutatività
della convoluzione continua

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)\ du$$

cambio di variabile
v = t-u

$$= \int_{\infty}^{-\infty} x(t-v)y(v)\ (-dv)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(v)x(t-v)\ dv$$

$$= y * x(t)$$

La conseguenza è che **l'ordine non conta**, ovvero
x * y * z = z * x * y = y * z * x = ….

Regola di traslazione
della convoluzione continua

$$y_{t_0}(t) = y(t - t_0)$$

segnale traslato

$$x * y_{t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y((t-u) - t_0)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y((t-t_0) - u)\, du$$

$$= x * y(t - t_0)$$ convoluzione traslata

La conseguenza è che **le traslazioni si sommano**, ovvero

$$x_{t_0} * y_{t_1}(t) = x_{t_0} * y(t - t_1) = x * y(t - t_0 - t_1) = x * y(t - (t_0 + t_1))$$

Linearità, associatività, commutatività
e regola di traslazione della convoluzione discreta

Linearità

$$(A\,x + B\,y) * z = A\,x*z + B\,y*z$$

$$x * (A\,y + B\,z) = A\,x*y + B\,x*z$$

Associatività

$$x * (y * z) = (x * y) * z = x * y * z$$

Commutatività

$$x * y = y * x$$

Traslazione

$$x * y_{n0}(n) = y * x\,(n - n_0)$$

Elemento neutro
della convoluzione continua

$$x * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\delta(t-u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\delta(u-t)\,du$$

il delta è una funzione pari

$$= x(t)$$

conseguenza 1

$$x * \delta_{t_0}(t) = x(t-t_0)$$

conseguenza 2

$$\begin{aligned} x_{t_0} * y_{t_1}(t) &= x * \delta_{t_0} * y * \delta_{t_1}(t) \\ &= x * y * \delta_{t_0} * \delta_{t_1}(t) \\ &= x * y(t-(t_0+t_1)) \\ &= x * y * \delta_{t_0+t_1}(t) \end{aligned}$$

Elemento neutro
della convoluzione discreta

$$
\begin{aligned}
x * \delta(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(k-n) \\
&= x(n)
\end{aligned}
$$

il delta è una funzione pari

proprietà rivelatrice del delta

Regola dell'area

nella convoluzione discreta

$$\begin{aligned}
A_{x*y} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x * y(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k) \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) A_y \\
&= A_x A_y
\end{aligned}$$

Regola dell'area
della convoluzione continua

$$A_{x*y} = \int_{-\infty}^{\infty} x * y(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u)\, du \right) dt$$

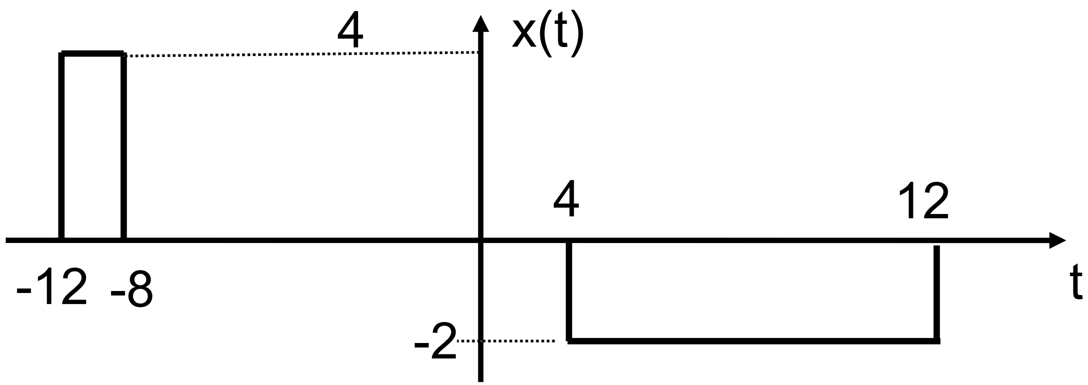
scambio l'ordine di integrazione

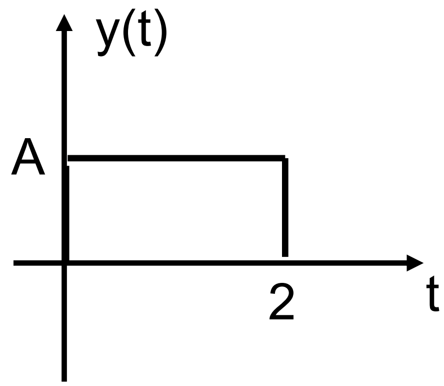
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t-u)\, dt \right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) A_y\, du$$

$$= A_x A_y$$

Es 1
Calcolare la convoluzione x*y(t) sfruttando la regola di convoluzione tra rettangoli (che restituisce un trapezio)





Es 2
Calcolare la convoluzione tra $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ e $y(t) = \mathrm{rect}(t/(2D))$

Es 3
Le seguenti espressioni sono delle convoluzioni. Identificare i segnali x(t) e y(t)

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} \sin(t-\tau)\, d\tau$$

$$z(t) = \int_0^\infty e^{t-\tau} \operatorname{sen}(\tau+2)d\tau,$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \operatorname{sen}(t-\tau+2)dt,$$

$$z(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \operatorname{sen}(\tau+2)d\tau, \text{ per } t>0, \text{ e } z(t)=0, \text{ per } t<0$$

Es 4
Calcolare la **convoluzione discreta** tra i segnali $x(n) = \cos(2\pi\, n/N)$ e $y(n) = 1_0(n)\, a^n$ con a reale e $|a|<1$

Es 5
Il segnale $z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k$ è esprimibile tramite una **convoluzione discreta** z(n)=x*y(n). Identificare i segnali x(n) e y(n)

La convoluzione periodica

Convoluzione con segnali periodici

caso #1

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u)\, du$$

aperiodico

periodico T_p

periodico T_p

$$\boxed{\begin{aligned} x * y(t+T_p) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t+T_p-u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u)\, du \\ &= x * y(t) \end{aligned}}$$

Convoluzione tra segnali periodici

caso #2

$$\cancel{x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x(u)y(t-u)}^{\text{periodico } T_p}\, du}$$

l'integrale diverge

periodico T_p periodico T_p

Bisogna utilizzare una diversa definizione di convoluzione

Convoluzione periodica

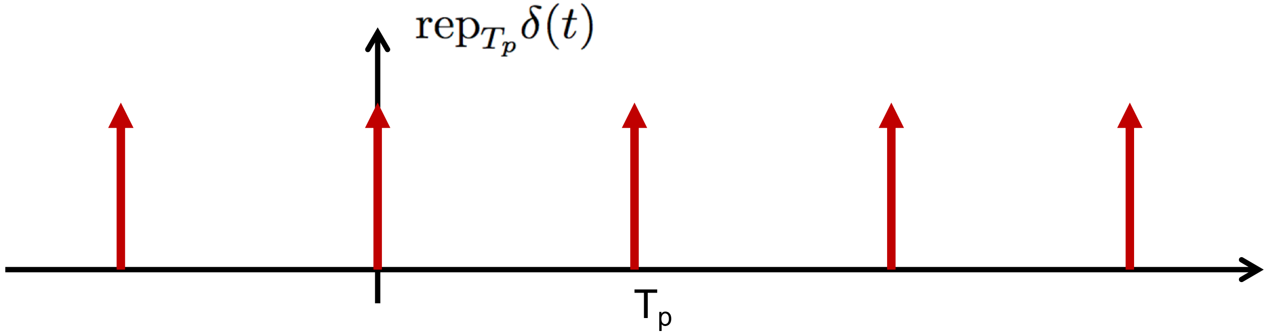
caso di sue segnali periodici dello stesso periodo

$$x * y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(u)y(t-u)\,du$$

periodico T_p periodico T_p periodico T_p

Stesse proprietà della convoluzione (aperiodica)

Ad eccezione dell'elemento neutro: il comb



Elemento neutro

della convoluzione periodica

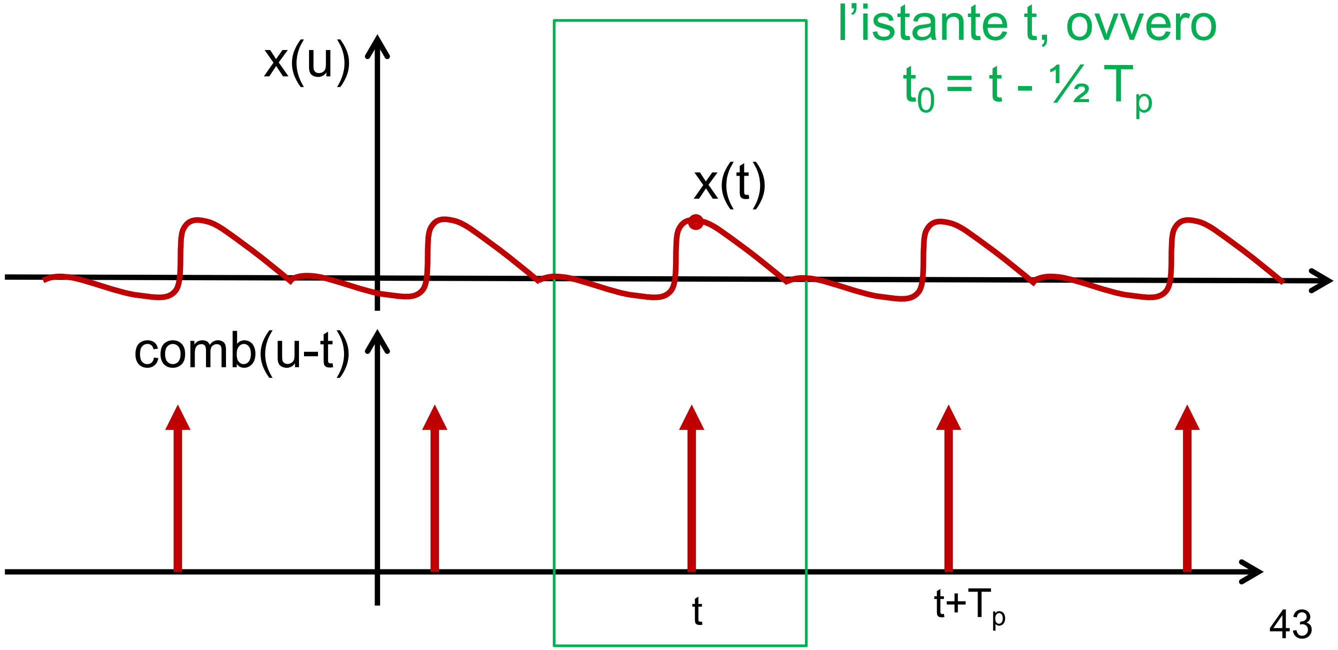
$$x * \mathrm{comb}(t) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(u)\,\mathrm{comb}(t-u)\,du$$

il comb è un segnale pari

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(u)\,\mathrm{comb}(u-t)\,du$$

$$= x(t)$$

scelgo un periodo di integrazione che contenga l'istante t, ovvero $t_0 = t - \frac{1}{2} T_p$



Convoluzione discreta periodica

caso di sue segnali periodici dello stesso periodo

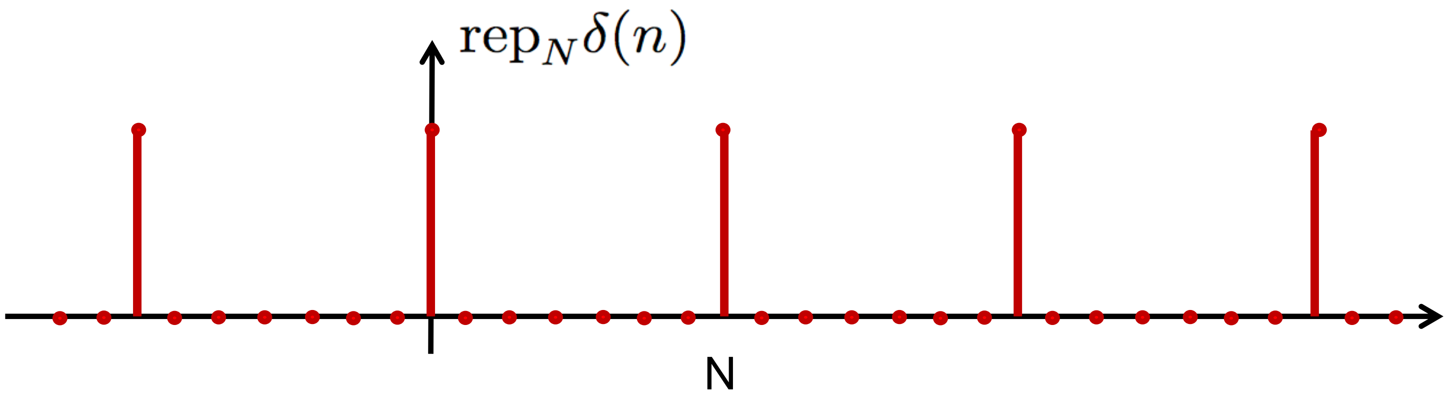
$$x * y(n) = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x(k)y(n-k)$$

periodico N

periodico N

periodico N

Stesse proprietà della convoluzione (aperiodica)
Ad eccezione dell'elemento neutro: il comb



Es 1

Dimostrare che la convoluzione discreta tra un segnale aperiodico ed un segnale periodico di periodo N, è periodica di periodo, N.

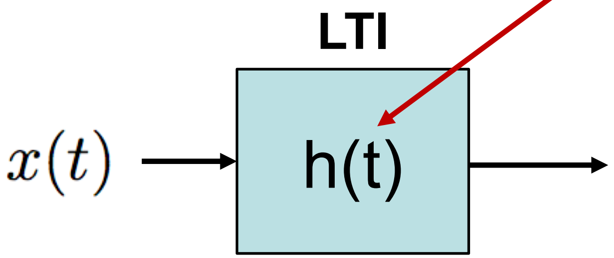
I filtri

Ovvero le trasformazioni LTI

Il filtraggio

esemplificato nel continuo

risposta impulsiva
aperiodica



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du$$

x(t) aperiodico $\longrightarrow$ y(t) aperiodico

x(t) periodico T_p $\longrightarrow$ y(t) periodico T_p

NOTA: Se h(t) = δ(t) allora y(t)=x(t) e la trasformazione è un'identità

Proprietà dei filtri
linearità, tempo invarianza, realtà

Linearità il filtraggio è una trasformazione lineare (per definizione)

Tempo invarianza il filtraggio è una trasformazione tempo invariante (per definizione)

Realtà il filtraggio è una trasformazione reale se e solo se la risposta impulsiva h(t) è reale

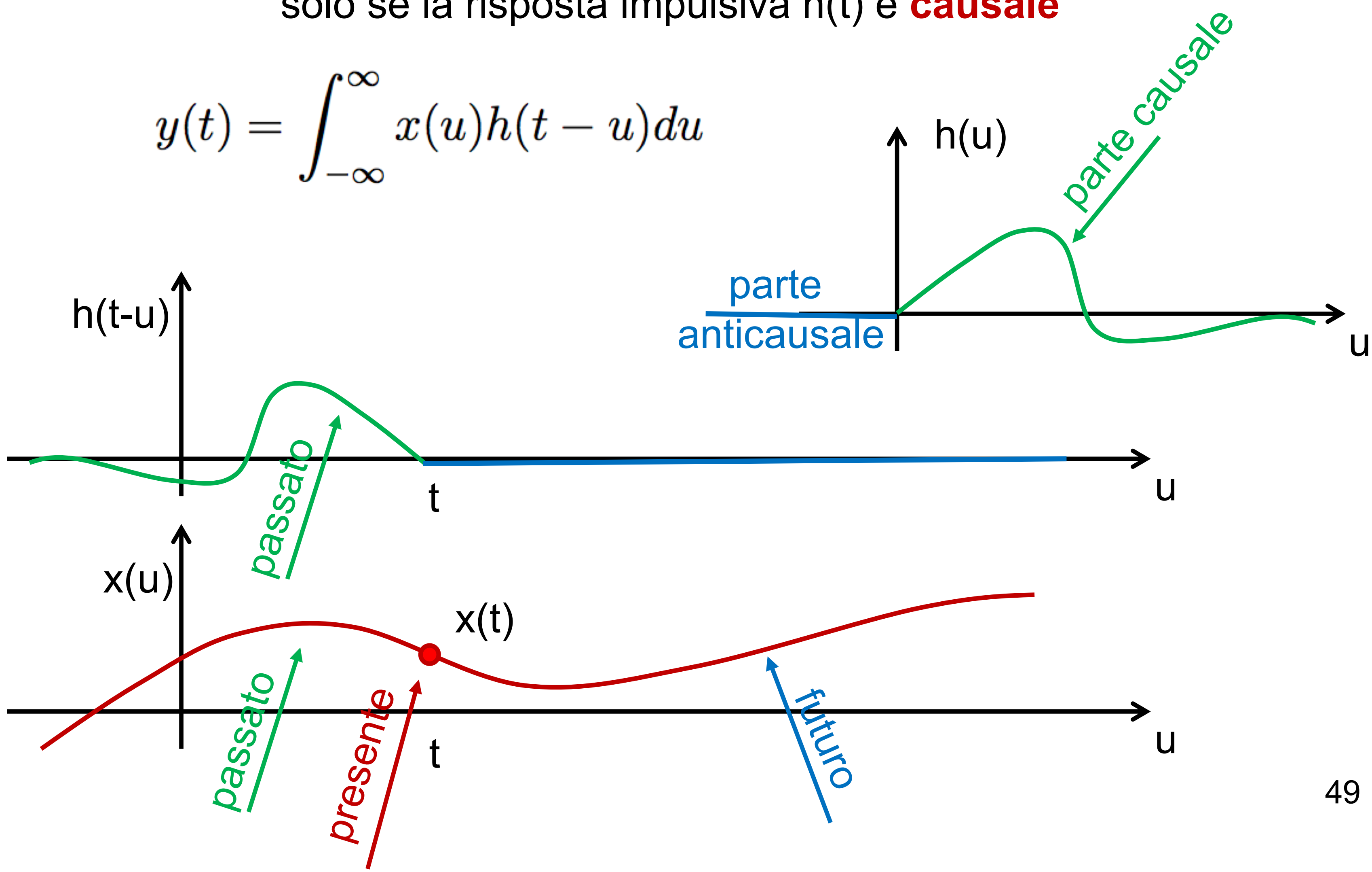
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du$$

Causalità dei filtri

che spiega l'uso della terminologia «segnali causali»

Causalità il filtraggio è una trasformazione causale se e solo se la risposta impulsiva h(t) è **causale**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du$$



BIBO stabilità il filtraggio è una trasformazione BIBO stabile se e solo se la risposta impulsiva h(t) è **assolutamente integrabile**

$$L_h = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

a) Dimostriamo che: $L_h < \infty \rightarrow$ BIBO stabilità

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h(t-u) du \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(u)||h(t-u)| du \quad \leq \int_{-\infty}^{\infty} L_x |h(t-u)| du$$

$$= L_x L_h$$

b) Dimostriamo che: BIBO stabilità → $L_h < \infty$

Per assurdo ipotizziamo che $L_h = \infty$

$$h(t) = |h(t)| e^{j\varphi(t)} \qquad x(t) = e^{-j\varphi(-t)}$$

$$|x(t)| = 1 = L_x$$

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(0-u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\cancel{-j\varphi(-u)}} \cdot |h(-u)| e^{\cancel{j\varphi(-u)}} du = \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| du$$

$$= \infty$$

diverge, il che contraddice la BIBO stabilità

BIBO stabilità dei filtri
nel discreto

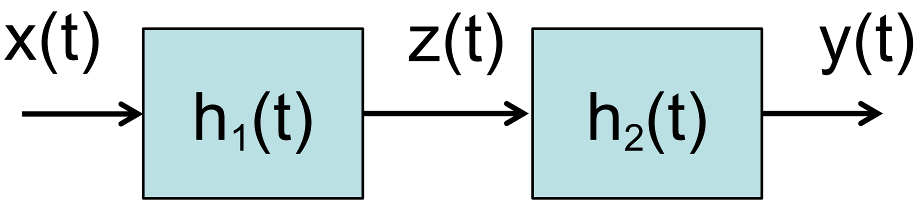
BIBO stabilità il filtraggio è una trasformazione BIBO stabile se e solo se la risposta impulsiva h(n) è **assolutamente sommabile**

$$L_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Serie e parallelo di filtri

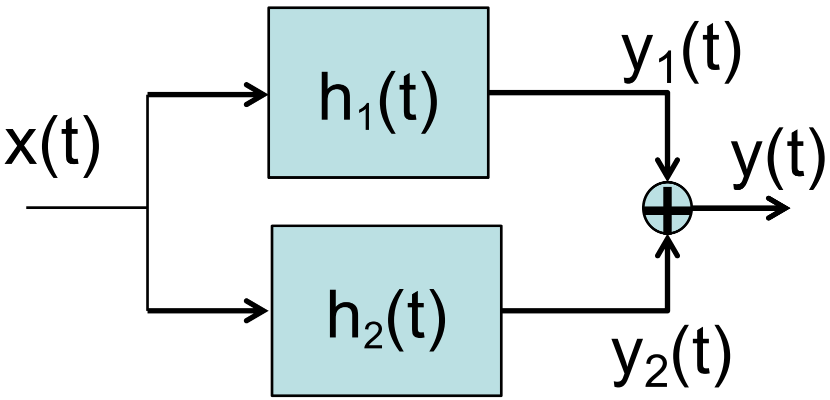
combinazioni

serie



$$\boxed{h(t) = h_1 * h_2(t)}$$

parallelo



$$\boxed{h(t) = h_1(t) + h_2(t)}$$

Es 1

Discutere la **stabilità** di un filtro avente come risposta impulsiva

1. $h(n) = n \cos(\pi\, n/4)\, 1_0(n)$
2. $h(t) = e^{-t} \cos(2t)\, 1(t)$

Es 2

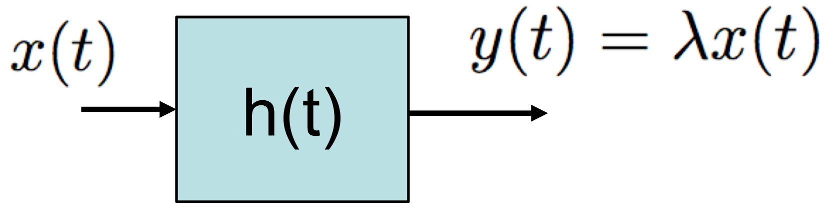
Il segnale $x(n) = \delta(n) - a\, \delta(n-1)$ è dato in pasto alla **cascata** di due filtri $h_1(n) = \sin(8n)$ e $h_2(n) = a^n\, 1_0(n)$ con $|a|<1$.

Si chiede

1. Se la cascata sia una trasformazione BIBO stabile
2. L'uscita del sistema y(n).

Autofunzioni dei filtri

caso continuo



$$\boxed{x(t) = e^{j\omega_0 t}}$$

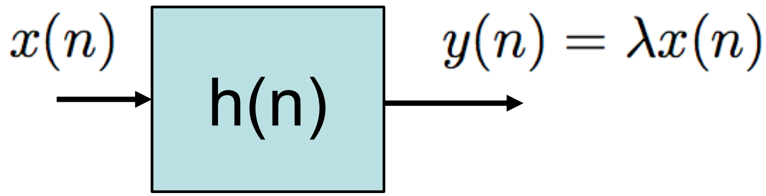
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du \;\; = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j\omega_0 (t-u)}du$$

$$= \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{x(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-j\omega_0 u}du}_{\lambda = H(j\omega_0)}$$

I coefficienti esistono sempre se il filtro è BIBO stabile $|H(j\omega_0)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|du$

Autofunzioni dei filtri

caso discreto



$$\boxed{x(n) = e^{j\omega_0 nT} = e^{j\varphi_0 n}}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\varphi_0(n-k)}$$

$$= \underbrace{e^{j\varphi_0 n}}_{x(n)} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\varphi_0 k}}_{\lambda = H(e^{j\varphi_0})}$$

I coefficienti esistono sempre se il filtro è BIBO stabile $|H(e^{j\varphi_0})| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$