X TUTORATO

PROVA D'ESAME

Es 1)

Sia f_a l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$F_a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -a \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

i) si ponga $a = 0$ e si determinino $\operatorname{Ker} f_0$, $\operatorname{Im} f_0$ e le loro dimensioni esplicitando una base per tali sottospazi

ii) si ponga $a = 0$ e si determini la matrice associata all'endomorfismo f_0 rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (1,-1,0), (1,0,-1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

iii) Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$, la controimmagine mediante f_a del vettore $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

iv) Determinare per quali a f_a è invertibile.

$a = 0$ $\quad F_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} F_0$ $\quad \begin{cases} 2x + 2y = 0 \iff x = 0 \\ 2y = 0 \iff y = 0 \end{cases}$ $\quad = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$z = z$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F$

$3 = 1 + 2$

$\operatorname{Im} F_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\mathbb{R}^3, B \xrightarrow{M_B{}^C} \mathbb{R}^3, C \xrightarrow{F_0} \mathbb{R}^3, C \xrightarrow{M_C{}^B} \mathbb{R}^3, B$$

$$M_B{}^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_C{}^B = (M_B{}^C)^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La matrice associata a f_0 rispetto a B e' il risultato del prodotto matriciale $M_C{}^B F_0 M_B{}^C$

iii) $f_\alpha(x, y, z) = (0, 1, 0)$

$$\Updownarrow$$

$$F_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III - \frac{\alpha}{2} I]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2-\alpha & \frac{\alpha^2}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[III + II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{\alpha^2}{2} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -\alpha & 0 \\ 0 & 2 & \frac{\alpha^2}{2} & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[III - \frac{\alpha}{2} II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -\alpha & 0 \\ 0 & 2 & \frac{\alpha^2}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha^3}{4} & 1-\frac{\alpha}{2} \end{array}\right)$$

se $\alpha \neq 0$ $\quad rk = 3 \implies$ unica soluzione

$$f_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\alpha^2} \\ 1/\alpha \\ \frac{2}{\alpha^3}(\alpha - 2) \end{pmatrix}$$

se $\alpha = 0$

non ci sono soluzioni

iv)

$|F_a| \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -a \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{vmatrix} 2 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^3$$

$a \neq 0$ è invertibile

Data una base ortogonale è facile la base ortonormale è

$$\frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) stabilire per quali valori di a la matrice B_a è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

ii) Per ciascuno dei valori di a trovati in i) determinare una base di autovettori di B_a, e, quando possibile, una matrice ortogonale che diagonalizzi B_a.

i) Polinomio caratt

$$\det(B_a - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ a-2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$= (a-\lambda)\left[\cancel{1} + \lambda^2 - 2\lambda \cancel{-1}\right]$$

$$= (a-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$= (a-\lambda)\lambda(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = a$

$\lambda_2 = 0$ se $a \neq 0, 2$ B_a ha tre autovalori distinti

$\lambda_3 = 2$

DIAGONALIZZABILE

- se $a = 0$ $\lambda = 0$ ha $\mu = 2$

vediamo l'Autospazio

$$V_0 = \ker B_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$-2x + y + z = 0$ $\quad x = 0$

$y + z = 0$ $\quad y = y$

$z = -y$

$\dim V_0 = 1 \Rightarrow$ per $a = 0$ NON DIAGONALIZZABILE

- se $a = 2$ $\lambda = 2$ ha $\mu = 2$

$$V_2 = \ker B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$-y + z = 0$ $\quad x = x$

$y - z = 0$ $\quad y = y$

$z = z$

$\Rightarrow \dim V_2 = 2 \Rightarrow$ DIAG

B_a è diagonalizzabile $\forall a \neq 0$.

ii) $a \neq 0, 2$

$$V_a = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a-2 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix} = \langle (a, a-1, 1) \rangle$$

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (0, 1, -1) \rangle$$

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ a-2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

$a=2$

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (0, 1, -1) \rangle$$

Ogni matrice simmetrica è una matrice diagonalizzabile e ha come matrice diagonalizzante una matrice ortogonale

B_2 è simmetrica $\Rightarrow$ V_2 e V_0 sono ortogonali

V_2 è ortogonale come base

quindi basta normalizzare i vettori trovati

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

51 Nello spazio affine $A^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti

$P_1 = (2,0,2)$ $P_2 = (1,-1,2)$ $P_3 = (2,2,2)$ $P_4 = (1,0,1)$

(a) Forma param e cartesiana di s passante per P_1 e P_2

? s (retta) $P_1 \in s$, $P_2 \in s$

$s = P_1 + \langle \underbrace{P_1P_2}_{\text{vettore direttore}} \rangle$

$P_1P_2 = P_2 - P_1 = (-1,-1,0)$

$$s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$x = 2 + y$

$t = -y$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$ FORMA CARTESIANA

(b) π passante per P_2, P_3, P_4

$\pi: ax + by + cz = d$

$$\begin{aligned} &\to P_2 \in \pi: \\ &\to P_3 \in \pi: \\ &\to P_4 \in \pi: \end{aligned} \begin{cases} a - b + 2c = d \\ 2a + 2b + 2c = d \\ a + 0 + c = d \end{cases}$$

$\cancel{a} - b + 2c = \cancel{a} + c \Rightarrow c = b$

$2a + 2b + 2c = a + c \Rightarrow a = -3c$

$\Rightarrow d = a + c \Rightarrow d = -2c$

$$\to c = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ d = -2 \end{cases}$$

$\boxed{\pi: -3x + y + z = -2}$ EQ. CARTESIANA

$z = 3x - y - 2$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -2 + 3t - s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

(c)

posizione reciproca tra π e s

rk coeff = più rk anche con termini noti

$$rk \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

se det $\neq 0 \Rightarrow$ rk MAX

$$- \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -[1 - 3] = \boxed{+2} \neq 0$$

ho rk MAX

$$rk \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow$ siamo in uno spazio di dim 3

$\Downarrow$

NON esistono più di 3 vettori lin. indipendenti

$\Rightarrow$ l'ultima colonna è sicuramente comb. lineare delle altre

$\Rightarrow$ s e π sono INCIDENTI

$$s \cap \pi : \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \\ -3x + y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = x - 2 = -1 \\ z = 2 \\ -3x + x - \cancel{2} + \cancel{2} = -2 \\ \boxed{x = 1} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cap \pi$$