10° Tutorato di Algebra

Tutor Erik Celnikasi

Esercizio 1.

Sia f_α l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

i) Si ponga $\alpha = 0$ e si determinino $\mathrm{Ker} f_0$, $\mathrm{Im} f_0$ e le loro dimensioni, esplicitando una base per tali sottospazi.

ii) Posto $\alpha = 0$, si determini la matrice associata all'endomorfismo f_0 rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (1,-1,0), (1,0,-1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

iii) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la controimmagine mediante f_α del vettore $\underline{b} = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$.

iv) Determinare per quali valori di α l'endomorfismo f_α è invertibile.

Esercizio 2.

Si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale a.

i) Stabilire per quali valori di a la matrice B_a è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

ii) Per ciascuno dei valori di a trovati in i) determinare una base di autovettori di B_a e, quando possibile, una matrice ortogonale che diagonalizzi B_a.

Esercizio 4 Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti $P_1 = (2,0,2)$, $P_2 = (1,-1,2)$, $P_3 = (2,2,2)$, $P_4 = (1,0,1)$.

(a) Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta s passante per i punti P_1 e P_2.

(b) Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π passante per i punti P_2 , P_3, P_4.

(c) Determinare la posizione reciproca di π ed s e determinare $s \cap \pi$.