IX Tutorato

Es 1

Foglio IX $\boxed{\text{Es } 5}$

Sia $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2, x_1 + x_3)$

(a)

$$A = M_{\mathcal{E}-\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\ker F = ?$

$\ker F = \ker A$

$$\ker F: \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = -x_1 \\ 2x_2 = 0 \longrightarrow x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = x_1 \end{cases} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim \ker F = 1$

(c) F è invertibile? $\Leftrightarrow \dim \ker F = 0$

$\Rightarrow$ NON È INVERTIBILE

(d) Per trovare gli autovalori si utilizzano gli autospazi

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda - 1 \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) - (\lambda - 2)$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} - \cancel{1})$$

$$= (\lambda - 2)^2 \lambda$$

AUTOVALORI:

quante volte annulla il pol caratteristico

dimensione dell'autospazio relativo a λ

$\lambda_1 = 0 \quad \mu_1 = 1 \quad g_1 = 1$

$\lambda_2 = 2 \quad \mu_1 = 2 \quad g_1 = 2?$

" si calcola come

$g_1(\lambda_1) = n - rk(A - \lambda_1 Id_n)$

ordine matrice quadrata

(e) AUTOSPAZI $\to \ker(A - \lambda I)$

$$A_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ già calcolato

A_{λ_2}

$$\ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_3 &= x_1 \\ x_1 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \end{aligned}$$

$$A_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow g_2 = 2$

(f) Diagonalizzabile?

Teorema Diagonalizzibilità

A è diagonalizzabile in un campo K $\Leftrightarrow$

- Il n° degli autovalori di A appartenenti a K e ~~contatti~~ contati con la loro molteplicità è pari all'ordine della matrice
- molteplicità geometrica, coincide con molteplicità algebrica.

$\Rightarrow$ è DIAGONIZZABILE

- $$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Base di autovettori: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\bar{h}$ per cui $A_{\bar{h}}$ ha autovalori di $\mu > 1$

$\Rightarrow \bar{h} = -1$ $\rightarrow$ trovare autospazi

$$A_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ AUTOSPAZIO $\lambda = 0$

$\bar{h} = -1$

(c) per $h=3$ trovare P tale che $P^{-1} A_3 P =$ Diagonale

$h=3 \Rightarrow A_3$ DIAG.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= -2 \end{aligned}$$

- $\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \rightarrow z = -3x \qquad A_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda_2 = 0$

$$\ker(A_3 - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + y = 0 & \rightarrow y = 2x \\ 3x - 2y + z = 0 & 3x - 4x + z = 0 \\ y - 2z = 0 & \rightarrow z = x \end{cases} \qquad A_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda_3 = -2$

$$\ker(A_3 + 2I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{A_{-2}} = \begin{cases} 2x + y = 0 & \rightarrow y = -2x \\ 3x + 2y + z = 0 & \rightarrow 3x - 4x + z = 0 \rightarrow z = x \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$A_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Data

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Dire per quali valori di h A è DIAGONALIZZABILE e per quali non lo è

-> usiamo ~~PZAh~~ p(t)

$$\det(A_h - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ h & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda h$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1 - h)$$

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda^2 - 1 - h = 0 \quad \to \lambda^2 = 1 + h$

I) CASO $\quad 1 + h > 0 \Leftrightarrow h > -1$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = \sqrt{1+h}$ 3 valori distinti => DIAGONALIZZABILE

$\lambda_3 = -\sqrt{1+h}$

II) CASO $\quad 1 + h < 0 \Leftrightarrow h < -1$

-> 2 autovalori complessi coniugati

=> NON DIAG su $\mathbb{R}$

III) CASO $\quad h = -1$

$\lambda = 0 \quad \mu = 3 \quad \to \quad g = ?$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ -x + z = 0 \quad z = x \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= x \\ y &= 0 \\ z &= x \end{aligned}$$

$$\dim A_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$g_1 = 1 \to$ NON DIAGONA.

Es 1/ Nello spazio Affine $A^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases} \quad e \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a)

$$r: \begin{cases} z = -x + y + 2 = -x + 2x \cancel{-2} \cancel{+2} = x \\ 3x - y + x - y - 2 = 2 \iff 4x - 2y = 4 \iff y = 2x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x \\ y = 2x - 2 \end{cases} \qquad r = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

FORMA PARAMETRICA

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b)

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x = 1 + k \iff k = x - 1 \\ y = -1 + k \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 + x - 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

(d) per $\bar{h} = -1$ $\to$ molteplicità > 1

$(A_{\bar{h}})^3 = 0$

$A_{\bar{h}}$ è simile a $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$?

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A_{-1})^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_{-1} è simile a B

rk B = 1 $\neq$ rk A = 2

NON SONO SIMILI

devono avere almeno lo stesso rango