7° Tutorato

1) Sia $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\varphi_a(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + ay \\ (1-a)y + z \\ ax + y + 2z \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la matrice associata a φ_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$M_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}}(\varphi_a) = ?$$

$$\begin{array}{cccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ A_a = & \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ a \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a \\ 1-a \\ 1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right) \end{array}$$

(b) $a = ?$ t.c. φ_a NON è suriettiva.

Endomorfismo è iniettivo $\iff$ è suriettivo

Dim

$F: V \to V$

$\dim V = \dim \operatorname{Im} V + \dim \ker V$

• se F è iniettiva $\Rightarrow \dim \ker V = 0$

$\Downarrow$

$\dim V = \dim \operatorname{Im} V$

$\Downarrow$

SURIETTIVA

• se F è suriettiva $\Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} V$

$\Downarrow$

Dal Teorema delle dim

$\dim \ker V = 0$

$\Downarrow$

INIETTIVITÀ

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se $\det A = 0 \Rightarrow$ $rk\,A$ non è max

$\Downarrow$

$\ker A_a \neq \{\bar{0}\}$

$\Downarrow$

NON INIETTIVITÀ

$\det |A| = (a-1)^2 \Rightarrow$ NON SURRIETTIVA $\boxed{a=1}$

(c) Per $a = 1$ determinare una base $\operatorname{Im} A_a$ e di $\ker A_a$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Im} A_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker A_1 = \ker^{III-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\ker A_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(d) Determinare la matrice associata a φ_a rispetto alla base

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Sia per il dominio che per il codominio

$$M_{A \to A}(\varphi_a) = ?$$

cambiare il codominio

cambiare la base del dominio

$$M_{A \to A}(\varphi_a) = M_{\mathcal{E} \to A}(id_{\mathbb{R}^3}) \; M_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}}(\varphi_a) \; M_{A \to \mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})$$

$$M_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}}(\varphi_a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{A \to \mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = [A]$$

$$M_{A \to \mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} S^T$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} -a+3 & \frac{-a+1}{2} & 3a+5 \\ a-1 & \frac{3a+3}{4} & \frac{-5a-5}{4} \\ a & \frac{5a+1}{4} & \frac{-3a+1}{4} \end{pmatrix}$$

Risolvere

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & w \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$AX = B$ $\qquad$ $X = A^{-1}B$

$A \cdot A^{-1} = 1$ $\qquad$ $\cancel{A^{-1}A}\, \boxed{X = A^{-1}B}$

Matrici $n \times n$

Inversa Matrice metodo Jordan-Gauss

Data A voglio trovare A^{-1}

1. $(A \mid Id_n)$
2. Riduco a gradini
3. Annullo gli elementi sopra i pivot
4. Devo Rendere i Pivot $= 1$
5. Si ottiene $(Id_n \mid E)$

$$\boxed{E = A^{-1}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}+2\mathrm{II}]{-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A^{-1}

$$\underset{\substack{\| \\ A^{-1}}}{\boxed{2} \times 2} \qquad 2 \times \boxed{4} \implies (2 \times 4)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{A^{-1} A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{-(\mathrm{II}) \\ \mathrm{III}-\mathrm{II}}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}-2\mathrm{III}]{\mathrm{I}-\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es 5

$$\begin{cases} -x + ky + 2z = 1 \\ -kx + y + (1+k)z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ -k & 1 & 1+k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A_k} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ SE rk A_k È MAX ⇒ SOL UNICA

DET A $\neq 0$

→ DET A $= 0$ → rk $A_k <$ rk$(A_k|b)$

⇓

S.L NON È RISOLUBILE

→ rk $A_k =$ rk$(A_k|b)$

S.L HA INFINITE SOLUZIONI