6° Tutorato di Algebra

Tutor Erik Celnikasi

1. Sia

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k-1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2-k \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali valori di k l'endomorfismo di R^3 rappresentato da A_k non \`e iniettivo.

(b) Per tali valori calcolare una base di kerA_k e una base di ImA_k.

(c) Per i valori di k per i quali A_k è iniettivo, trovare le soluzioni del sistema lineare

$$A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Sia $\mathcal{A}$ = {(1,1,1),(2,1,0),(0,−1,2)} e sia $\mathcal{B}$ = {(3,1,0),(0,−1,3),(−1,−1,−1)}.

   (a) Verificare che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono basi di R^3.

   (b) Determinare la matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ e la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{A}$ (sugge- rimento: calcolare la matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ alla base canonica e la matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}$).

3. Sia $\varphi_a : R^3 \to R^3$ tale che $\varphi_a(x, y, z) = (x + ay, (1 - a)y + z, ax + y + 2z)$.

   (a) Determinare la matrice associata a φ_a rispetto alla base canonica di R^3.

   (b) Determinare per quali valori del parametro a l'endomorfismo φ_a non \`e suriettivo.

   (c) Per i valori di a per i quali φ_a non \`e suriettivo, determinare una base di kerφ_a ed una base di Imφ_a.

   (d) Determinare la matrice associata a φ_a rispetto alla base A = {(1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, −1, 2)} di R^3.