Es Siano date le rette

$$r: (1,0,2)+\langle(1,-1,-1)\rangle \qquad s: \begin{cases} x+y+z=5 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$$

(a) Determinare eq. cartesiane per r e forma par. per s.

Per la retta r:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 1+\alpha \to x = 1-y \\ y = -\alpha \to \alpha = -y \\ z = 2-\alpha \to z = 2+y \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x+y = 1 \\ y-z = -2 \end{cases}$$

Per la retta s:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+y-2z=-1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ -3z=-6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x+y=3 \\ z=2 \end{array} \qquad s: \begin{pmatrix} 3-\beta \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(b) Determinare la posizione reciproca di r e s, la loro distanza e i punti $R\in r$ $S\in s$ di minima distanza.

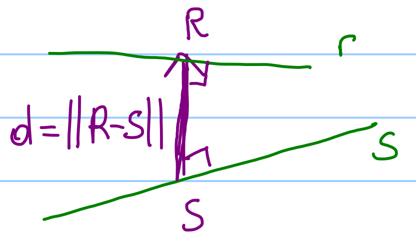
Intersechiamo le equazioni cartesiane di r e di s.

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ y-z=-2 \\ x+y+z=5 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ III-I \\ IV-I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$
\begin{array}{l}
\\ \\ IV+2III \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 6
\end{array}\right)
$$

Le due rette sono sghembe.



Cerchiamo $R \in r$, $S \in s$ tale che $R-S$ sia ortogonale sia a r che a s.

$r: (1,0,2) + \langle (1,-1,-1) \rangle$

$s: (3,0,2) + \langle (-1,1,0) \rangle$

punto generico di r — punto generico di s

$$R = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -\alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 3-\beta \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R-S = \begin{pmatrix} -2+\alpha+\beta \\ -\alpha-\beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$(R-S) \perp$ direzione di r $\qquad (R-S) \cdot (1,-1,-1) = 0$

$(R-S) \perp$ " di s $\qquad (R-S) \cdot (-1,1,0) = 0$

$$\begin{cases} (-2+\alpha+\beta) - (-\alpha-\beta) - (-\alpha) = 0 \\ -(-2+\alpha+\beta) + (-\alpha-\beta) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 2 \\ 2\alpha + 2\beta = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = \|R-S\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}.$$

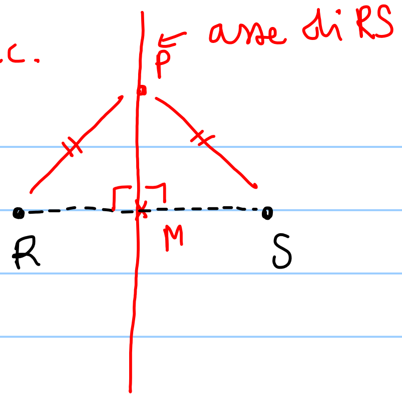
(c) Determinare il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da R e da S.

Vogliamo tutti i punti P tali che $PR = PS$.

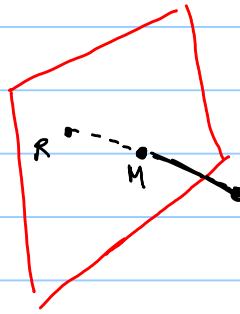
Metodo 1 (geometrico):

Se fossimo nel piano, il luogo cercato sarebbe la retta passante per il punto medio di RS e ortogonale al segmento RS.

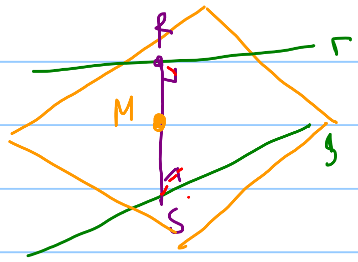
punti P t.c. $PR = PS$



Nello spazio tridimensionale, il luogo è



il piano passante per il punto medio di RS e ortogonale al segmento RS.



Nel nostro caso l'ortogonale a RS è generato dalle due direzioni delle rette r e s. Possiamo quindi descrivere il piano come il piano passante per il punto medio di RS e avente come direzioni quelle di r e s.

$$M = \frac{R+S}{2} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}3/2\\1/2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3/2\\1/2\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Metodo 2 (algebrico):

$P = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ha la stessa distanza da R e S

$$\iff \|P-R\| = \|P-S\| \iff \left\| \begin{pmatrix}x-1\\y\\z-2\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-2\end{pmatrix} \right\|$$

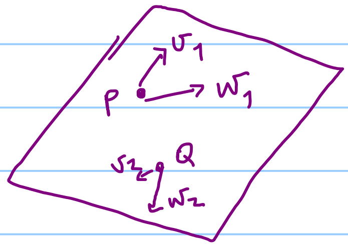
$$\iff (x-1)^2 + y^2 + \cancel{(z-2)^2} = (x-2)^2 + (y-1)^2 + \cancel{(z-2)^2}$$

$\iff \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 2y + 1$

$\iff 2x + 2y = 4 \iff x + y = 2$

Potete osservare che abbiamo ottenuto lo stesso piano in entrambi i casi.

NOTA: Dato un sottospazio affine, esistono infinite forme parametriche o equazioni cartesiane per descriverlo.

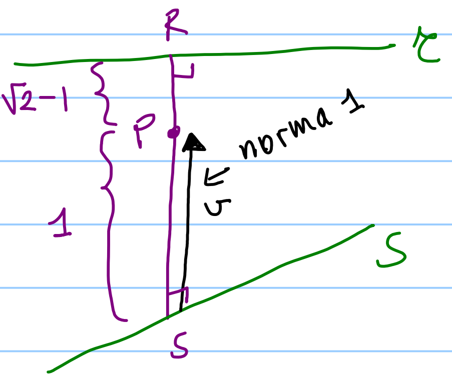
Esempi: ① 

$P + \langle v_1, w_1 \rangle$ e $Q + \langle v_2, w_2 \rangle$ descrivono lo stesso piano.

② $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

descrivono la stessa retta.

(d) Determinare un piano a distanza $\sqrt{2} - 1$ da r e distanza 1 da s.



Troviamo un punto P sul segmento RS tale che $PS = 1$ e $PR = \sqrt{2} - 1$.

$R - S = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v$ è multiplo di $R-S$ $\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

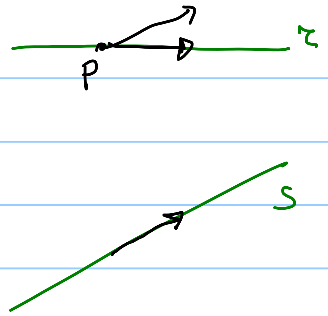
Vogliamo trovare α t.c. $\left\| \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \iff \sqrt{2}\,\alpha = 1$

$\iff \alpha = 1/\sqrt{2}$.

$$P = S + v = S + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1/\sqrt{2} \\ 1 - 1/\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - 1/\sqrt{2} \\ 1 - 1/\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

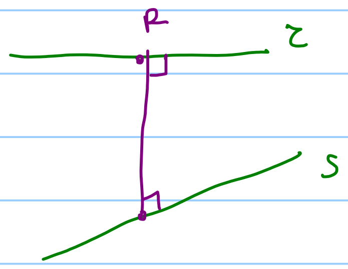
(e) Determinare il piano contenente r e parallelo a s.



punto + < vettore 1, vettore 2 >

$$\underset{\text{punto di } r}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}} + \left\langle \underset{\text{dir di } r}{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{\text{dir di } s}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}} \right\rangle.$$

(f) Determinare la retta ortogonale a r e s, e passante per $(2,-1,2)$.



punto + < vettore >

ortogonale alla direzione di r e alla direzione di s $= R - S$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

NOTA 1: Se non avessimo già trovato R e S, per trovare un vettore ortogonale sia a r che a s, avremmo proceduto così:

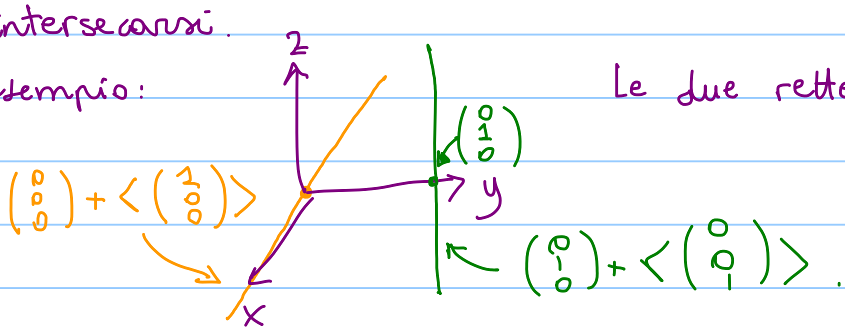
$$v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} v \perp \text{dir } r \\ v \perp \text{dir } s \end{matrix} \qquad \begin{cases} v \cdot (1,-1,-1) = 0 \\ v \cdot (-1,1,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Prendendo ad esempio $b = -1$
$v = (-1,-1,0)$.

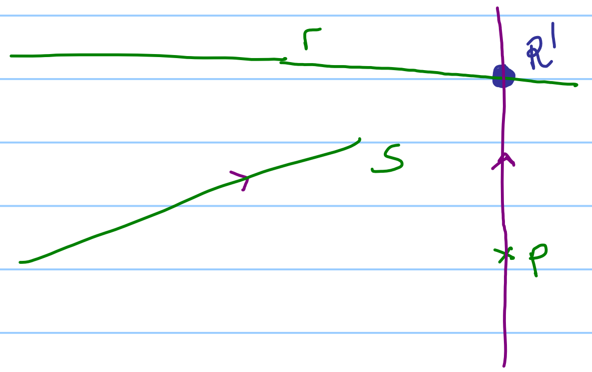
NOTA 2: La condizione di ortogonalità riguarda esclusivamente la "direzione", NON i punti.
Diciamo che $P + \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ è ortogonale a $Q + \langle w_1, \dots, w_{k'} \rangle$ quando $v_i \in \langle w_1, \dots, w_{k'} \rangle^\perp$ per ogni $i = 1, \dots, k$.
Due sottovarietà ortogonali NON devono necessariamente intersecarsi.

Esempio:



Le due rette sono ortogonali

(g) Determinare una retta passante per $P=(1,0,1)$, incidente r e ortogonale ad s.



Prendiamo un punto generico di r

$$R' = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -\alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix}$$

e imponiamo che $R'-P$ sia ortogonale alla direzione di s.

$$\begin{pmatrix} \cancel{1}+\alpha-\cancel{1} \\ -\alpha \\ 2-\alpha-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\alpha-\alpha=0$$
$$\alpha=0$$

quindi $R' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La retta è $P + \langle(R'-P)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(g) Sia $\pi_a : 2x-y+az=2$. Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ t.c. π_a intersechi la retta r. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare la distanza tra π_a e r.

$$\begin{cases} x+y=1 & \longrightarrow \quad x = 1-y \\ y-z=-2 & \longrightarrow \quad z=y+2 \\ 2x-y+az=2 \end{cases}$$

$$2(1-y)-y+a(y+2)=2$$

$$\cancel{2}-2y-y+ay+2a=\cancel{2}$$

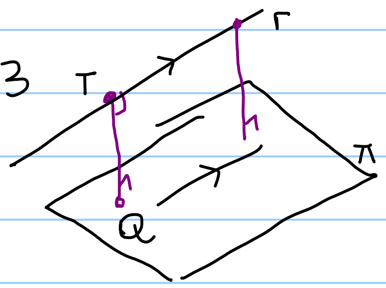
$$(-3+a)y=-2a$$

Se $a \neq 3$, $y = -\dfrac{2a}{a-3}$ .... quindi il sistema ha una soluzione

Se $a=3$, $0=-6$ quindi il sistema NON ha soluzione.

$a \neq 3$: il piano e la retta si intersecano in un punto e la distanza è 0.

$a = 3$



il piano e la retta sono paralleli.
Per trovare la distanza,
scegliamo un punto qualsiasi di r,
ad esempio $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,
prendiamo un punto generico Q
di π_a e imponiamo che $T-Q$ sia ortogonale al piano (e alla retta).

π_3: $2x - y + 3z = 2$

$$x = 1 + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}z$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 + a/2 - 3b/2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$Q - T = \begin{pmatrix} a/2 - 3b/2 \\ a \\ b-2 \end{pmatrix} \text{ ortogonale a } \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{4} - \frac{3}{4}b + a = 0 \\ -\frac{3}{4}a + \frac{9}{4}b + b - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5a - 3b = 0 \\ -3a + 13b = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3/7 \\ b = 5/7 \end{cases}$$

$$a/2 - 3b/2 = -6/7$$
$$a = 3/7$$
$$b - 2 = -9/7$$

$$Q - T = \begin{pmatrix} -6/7 \\ 3/7 \\ -9/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{distanza} = \|Q - T\| = \sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{9}{7}\right)^2}.$$