EALG - Tutorato 11

Titolo nota 20/05/2021

ES Sia $U = \langle \underset{u_1}{(2,0,1,-1)}, \underset{u_2}{(1,0,1,0)}, \underset{u_3}{(1,-1,-1,0)} \rangle$

(a) Determinare una base di $U^\perp$.

$$U^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^4 : v \cdot u = 0 \quad \forall u \in U \}$$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^4 : v \cdot u_1 = 0, \ v \cdot u_2 = 0, \ v \cdot u_3 = 0 \}$$

$v = (x, y, z, t)$

$$\begin{matrix} v \cdot u_1 = 0 \\ v \cdot u_2 = 0 \\ v \cdot u_3 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} 2x + z - t = 0 & (\mathrm{I}) \\ x + z = 0 & (\mathrm{II}) \\ x - y - z = 0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

(II) $x = -z$

(III) $-z - y - z = 0 \Rightarrow y = -2z$

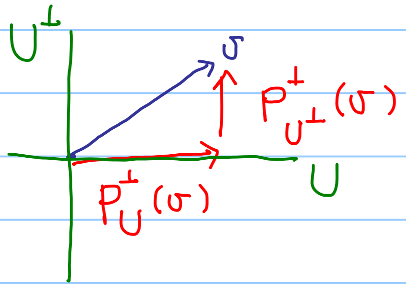
(I) $-2z + z - t = 0 \Rightarrow t = -z$

$$\begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \\ -z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$

$U^\perp = \langle (-1, -2, 1, -1) \rangle$. $\qquad \dim U + \dim U^\perp = 4$

(b) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (a, 0, 0, b)$ su U.



$$v = \underline{\underline{P^\perp_U(v)}} + P^\perp_{U^\perp}(v)$$

MODO 1 Non richiede di conoscere basi ortonormali e usa le due condizioni ① + ②.

① $v - P^\perp_U(v) = P^\perp_{U^\perp}(v) \in U^\perp$

$v = (a, 0, 0, b)$

② $P^\perp_U(v) \in U \Rightarrow P^\perp_U = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta + \gamma \\ -\gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha \end{pmatrix}$

Imponiamo $v - P^\perp_U(v) \in U^\perp$

$$\begin{pmatrix} a-(2\alpha+\beta+\gamma) \\ -(-\gamma) \\ -(\alpha+\beta-\gamma) \\ b-(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\-1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \cdot \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \cdot \begin{pmatrix} 1\\-1\\-1\\0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2\big(a-(2\alpha+\beta+\gamma)\big) - (\alpha+\beta-\gamma) - (b+\alpha) = 0 \\ a-(2\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha+\beta-\gamma) = 0 \\ a-(2\alpha+\beta+\gamma) - \gamma + (\alpha+\beta-\gamma) = 0 \end{cases}$$

Sistema di 3 equazioni in 3 incognite α, β, γ che potremmo risolvere.

MODO 2 Usiamo le basi ortonormali.

Non conosciamo una base ortonormale di U e dovremmo applicare G-S per trovarne una. D'altra parte $\dim(U^\perp)=1$ ed è immediato trovare una base ortonormale per $U^\perp$.

$$U^\perp = \langle \underbrace{(-1,-2,1,-1)}_{=u} \rangle$$

$$w_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2+(-1)^2}} \begin{pmatrix} -1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix}$$

$\{w_1\}$ è base ortonormale per $U^\perp$

$$P^\perp_{U^\perp}(v) = (w_1 \cdot v)\, w_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\\0\\0\\b \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}(-a-b) \begin{pmatrix} -1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix} = -\frac{a+b}{7} \begin{pmatrix} -1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix}$$

$$P^\perp_U(v) = v - P^\perp_{U^\perp}(v) = \begin{pmatrix} a\\0\\0\\b \end{pmatrix} - \left(-\frac{a+b}{7}\right) \begin{pmatrix} -1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6a+b)/7 \\ -2(a+b)/7 \\ (a+b)/7 \\ (6b-a)/7 \end{pmatrix}$$

(c) Determinare i vettori del sottospazio $W = \langle (1,0,0,0), (0,0,0,1) \rangle$ la cui proiezione ortogonale su U appartiene a $\langle (1,0,0,1) \rangle$

Dato $w \in W$, $w = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ e $p_U^{\perp}(w) = \begin{pmatrix} \frac{6a+b}{7} \\ -\frac{2(a+b)}{7} \\ \frac{a+b}{7} \\ \frac{6b-a}{7} \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{6a+b}{7} = \frac{6b-a}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=0 \\ 7a-5b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-b & \to a=0 \\ -7b-5b=0 & \to b=0 \end{cases}$$

L'unico vettore di W che soddisfa la richiesta è $w=0$.

(d) Determinare un sistema lineare che abbia come soluzione U.
$U = \langle (2,0,1,-1), (1,0,1,0), (1,-1,-1,0) \rangle$

MODO 1 (forma parametrica → forma cartesiana)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eliminare i parametri α, β, γ per determinare un sistema che abbia come soluzione.

MODO 2 (eq. generale)

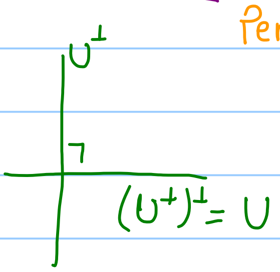
Scriviamo un'eq generica $ax+by+cz+dt=0$ e imponiamo che sia soddisfatta dai vettori di U.

$$\begin{cases} 2a \quad +c-d=0 \\ a \quad +c \quad =0 \\ a-b-c \quad =0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-c \\ b=-2c \\ d=-c \end{cases}$$

Prendendo ad esempio $c=1$, otteniamo $-x-2y+z-t=0$.

MODO 3 (ortogonale)

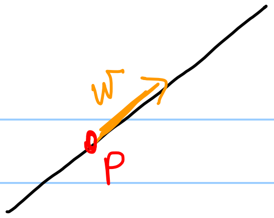
Per ogni sottospazio U, abbiamo $(U^{\perp})^{\perp} = U$.



$$U = (U^{+})^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^4 : v \cdot (-1,-2,1,-1) = 0 \}$$

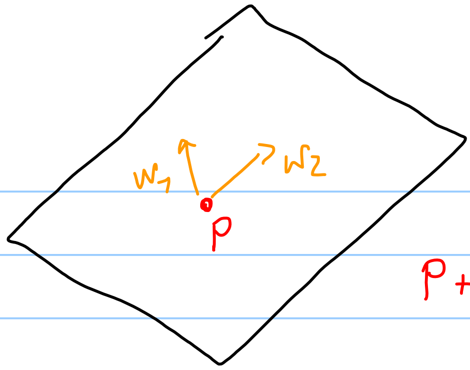
$$-x-2y+z-t=0$$

GEOMETRIA



$P + \langle w_1, \dots, w_n \rangle$

$P + \langle w \rangle$



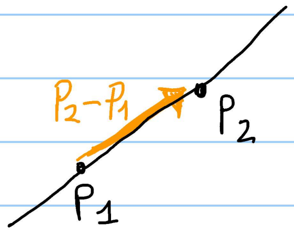
$P + \langle w_1, w_2 \rangle$

F11.4 In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti

$P_1 = (2, 0, 2) \qquad P_2 = (1, -1, 2) \qquad P_3 = (2, 2, 2) \qquad P_4 = (1, 0, 1)$

(a) Determinare forma par. e cartesiana per la retta s passante per P_1 e P_2.

$s: \; P + \langle w \rangle$

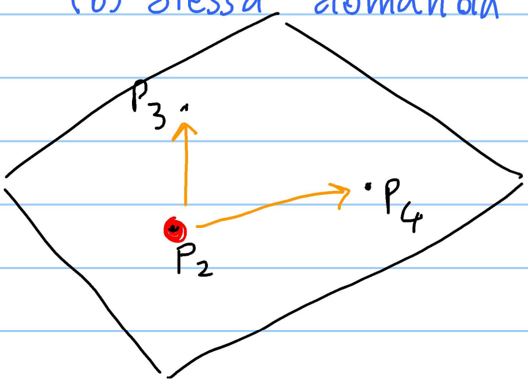


$P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$ descr. param.

$$\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 2 - \alpha = 2 + y \\ \alpha &= -y \\ z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$ descr. cartesiana

(b) Stessa domanda per il piano π passante per P_2, P_3, P_4.



$P_2 + \langle P_3 - P_2, \; P_4 - P_2 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 + 3\alpha + \beta \\ z = 2 - \beta \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\to \alpha = x - 1 \\ & \\ &\to \beta = 2 - z \end{aligned} \qquad y = -1 + 3x - 3 + 2 - z$$

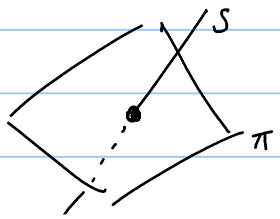
$\pi: \; 3x - y - z = 2$

(c) Determinare la posizione reciproca di π e s. Determinare $\pi \cap s$.

$$\pi \cap s \begin{cases} 3x - y - z = 2 \\ x - y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

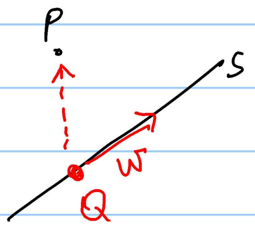
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \mathrm{II} \\ \mathrm{I}-3\mathrm{II} \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Non ci sono pivot nella colonna dei termini noti, quindi il sistema ha soluzione (cioè $\pi \cap s \neq \emptyset$). Inoltre tutte le variabili sono pivot, quindi per descrivere le soluzioni abbiamo bisogno di zero parametri, cioè $\pi \cap s$ = punto.



$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2y - z = -4 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \pi \cap s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

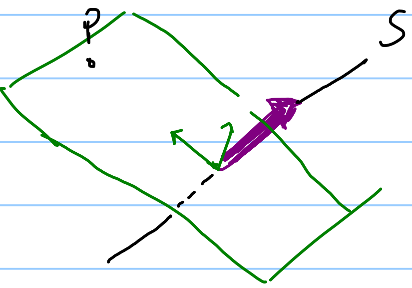
(d) Determinare il piano contenente la retta s e il punto $(0,0,1)$.



piano: $Q + \langle w, P - Q \rangle$

dove s è data da $Q + \langle w \rangle$.

(e) Determinare il piano ortogonale a s e passante per $(1,1,1)$.



punto + $\langle$ vettore 1, vettore 2 $\rangle$

$(1,1,1)$ condizione di passaggio

i due vettori devono essere ortogonali alla direzione della retta s

$$s: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \{ \quad : -x - y = 0 \}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Piano: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

ES Date le rette in $\mathbb{R}^3$ $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$

determinare la loro posizione reciproca.

$$r \cap s \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operazioni elementari}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

C'è un pivot nella colonna dei termini noti $\Rightarrow r \cap s = \emptyset$

Inoltre tutte le variabili sono pivot, quindi l'unica soluzione del sistema omogeneo associato è il vettore nullo.

Le rette sono sghembe.