E8.4 Siano $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
due basi di $\mathbb{R}^3$.
Determinare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ e quella dalla base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ $\qquad$ $\mathcal{B} = \{ w_1, w_2, w_3 \}$

$$A_{id, \mathcal{A}, \mathcal{B}} = \left( (v_1)_B \quad (v_2)_B \quad (v_3)_B \right).$$

$(v_1)_B \to$ coordinate di $v_1$ nella base $B$.

(modo 1) $\quad (v_1)_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff v_1 = a w_1 + b w_2 + c w_3$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Possiamo trovare $a, b, c$, e procedere allo stesso modo per $(v_2)_B$, $(v_3)_B$.

(modo 2, "passando per la base canonica")

$$A_{id, \mathcal{A}, \mathcal{B}} = A_{id, \mathcal{E}, \mathcal{B}} \cdot A_{id, \mathcal{A}, \mathcal{E}}$$

$$= \left( A_{id, \mathcal{B}, \mathcal{E}} \right)^{-1} \cdot A_{id, \mathcal{A}, \mathcal{E}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{id, \mathcal{B}, \mathcal{A}} = \left( A_{id, \mathcal{A}, \mathcal{B}} \right)^{-1}.$$

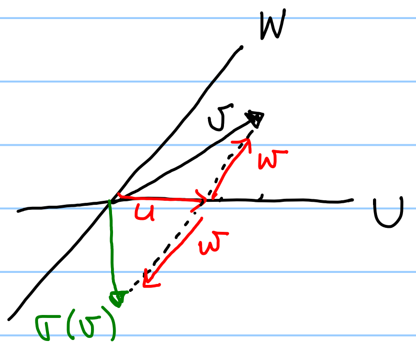
ES $U \oplus W = \mathbb{R}^5$

$U$ base $\{u_1, u_2, u_3\}$

$W$ base $\{w_1, w_2\}$

$\sigma$ = simmetria di asse $U$ e direzione $W$.

Scrivere la matrice di $\sigma$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.




$B = \{u_1, u_2, u_3, w_1, w_2\}$ base di $\mathbb{R}^5$.

$$A_{\sigma, B, B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$v = u + w \quad u \in U, w \in W$

$\sigma(v) = u - w$.

Se $u \in U$ allora $\sigma(u) = u$

Se $w \in W$ allora $\sigma(w) = -w$.

$$A_{\sigma, \mathcal{E}, \mathcal{E}} = A_{id, B, \mathcal{E}} \cdot A_{\sigma, B, B} \cdot A_{id, \mathcal{E}, B}$$

# PROIEZIONI ORTOGONALI

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortogonale di $V$.

$$\longrightarrow \quad v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Dato $v \in V$, $\exists$ $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$.

DOMANDA: Come trovare esplicitamente $\mu_1, \dots, \mu_n$?

$$v \cdot v_1 = (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) \cdot v_1$$

$$= \mu_1 \, v_1 \cdot v_1 + \mu_2 \overbrace{v_2 \cdot v_1}^{=0} + \dots + \mu_n \overbrace{v_n \cdot v_1}^{=0}$$

$$= \mu_1 \, v_1 \cdot v_1$$

$$\mu_1 = \frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \qquad \text{e in generale} \qquad \mu_i = \frac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}.$$

$$\pi^{\perp}_{\langle v_i \rangle}(v) = \pi^{\perp}_{\langle v_i \rangle}\left(\mu_1 v_1 + \dots + \overbrace{\mu_i v_i} + \dots + \mu_n v_n\right)$$

$$= \mu_i v_i \qquad \text{prendiamo esclusivamente la componente su } \langle v_i \rangle.$$

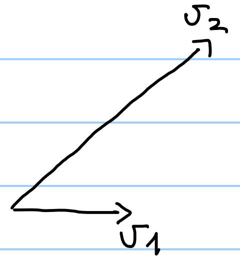
$$= \frac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} \, v_i$$

In particolare, se la base è ortonormale, $v_i \cdot v_i = \|v_i\|^2 = 1$ e quindi $\mu_i = v \cdot v_i$.

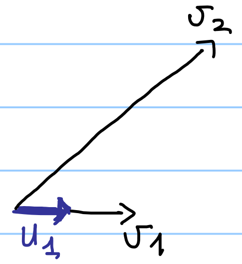
MORALE: sappiamo scrivere esplicitamente le proiezioni ortogonali.

DOMANDA: Data $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V$, come trovare una base ortonormale? → processo di G-S.

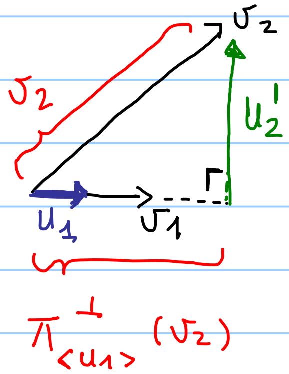
ESEMPIO $(n = 2)$




Data $\{v_1, v_2\}$ base di $V$, vogliamo costruire una base ortonormale $\{u_1, u_2\}$ di $V$.




$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$




$$u_2' = v_2 - \pi^{\perp}_{\langle u_1 \rangle}(v_2)$$

$$= v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$$

Se $n$ fosse 3, il prossimo step sarebbe

$$u_3' = v_3 - \pi^{\perp}_{\langle u_1 \rangle}(v_3) - \pi^{\perp}_{\langle u_2 \rangle}(v_3)$$

$$= v_3 - (v_3 \cdot u_1)\, u_1 - (v_3 \cdot u_2)\, u_2$$

$$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|}.$$

F10.1 Sia $U = \langle (1,1,1,1) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una base ortonormale per $U$ e una per $U^\perp$.

$$w_1 = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$\{w_1\}$ è una base ortonormale per $U$.

$$U^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^4 : v \cdot u = 0 \quad \forall u \in U \}$$

basta imporre la condizione di ortogonalità sui vettori di una base di $U$.

$$= \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : v \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0 \right\}$$

$$= \left\langle \overset{=v_1}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \overset{=v_2}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \overset{=v_3}{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

Applichiamo G-S.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 1+0+0+0 = 1$$

$$u_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \left[ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2'\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 0} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{3/2}$$

$$u_3' = \sqrt{3} - (\sqrt{3} \cdot u_1)\, u_1 - (\sqrt{3} \cdot u_2)\, u_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$- \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (1 + 0 + 0 + 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{3/2} \left( 1/2 + 0 + 0 + 0 \right) \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 1/2 + 1/6 \\ 0 - 1/2 + 1/6 \\ 0 + 0 - 1/3 \\ 1 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

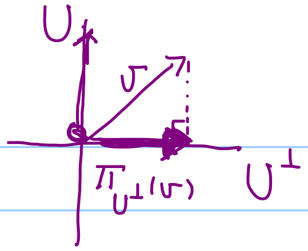
$$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{4/3}} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|u_3'\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ base ortonormale per $U^+$.

(b) Sia $\pi^{\perp}_{U^\perp}$ la proiezione ortogonale su $U^\perp$. Determinare la matrice di $\pi^{+}_{U^\perp}$ rispetto alla base canonica.

(metodo 1: cambiamento di base - stesso procedimento usato per proiezioni e simmetrie qualsiasi)




$\mathcal{B} = \{ w_1, \; u_1, u_2, u_3 \}$

dove $\{w_1\}$ è base ortonormale di $U$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ " di $U^+$.

$$D = A_{\pi^\perp_{U^\perp}, \mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\pi^+_{U^\perp}, \mathcal{E}, \mathcal{E}} = A_{id, \mathcal{B}, \mathcal{E}} \; A_{\pi^\perp_{U^+}, \mathcal{B}, \mathcal{B}} \cdot A_{id, \mathcal{E}, \mathcal{B}}$$

$$= H \cdot D \cdot H^{-1}$$

Dato che $\mathcal{B}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^4$, la matrice $H$ verifica $H^{-1} = H^t$ (cioè per invertire $H$, basta trasporre).

$$= H \cdot D \cdot H^t.$$

metodo 2: usiamo quanto visto sopra sulle proiezioni ortogonali. Questo metodo è comodo quando si conosce una base ortogonale o ortonormale dello spazio su cui si proietta.

Dato che $\{u_1, u_2, u_3\}$ è base ortonormale di $U^+$,

$$\pi^\perp_{U^\perp}(v) = \pi^\perp_{\langle u_1, u_2, u_3 \rangle}(v) =$$

$$= (v \cdot u_1)\, u_1 + (v \cdot u_2)\, u_2 + (v \cdot u_3)\, u_3$$

che fornisce già una formula esplicita. D'altra parte,

$$v = \pi^+_{U^\perp}(v) + \pi^+_U(v) \quad \text{e} \quad \pi^\perp_U(v) = \pi^+_{\langle w_1 \rangle}(v) = (v \cdot w_1)\, w_1$$

quindi conviene calcolare $\pi^\perp_U(v)$ e poi usare $\pi^\perp_{U^\perp}(v) = v - \pi^\perp_U(v)$.

Sia $v = (a, b, c, d)$.

$$\pi_U^\perp(v) = \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(a+b+c+d)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{U^\perp}^\perp(v) = v - \pi_U^\perp(v) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \frac{a+b+c+d}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3a - b - c - d \\ -a + 3b - c - d \\ -a - b + 3c - d \\ -a - b - c + 3d \end{pmatrix}$$

(metodo 3: può essere applicato anche senza conoscere una base ortogonale.)

$\pi_U^\perp(v) \in U$, quindi $\pi_U^\perp(v) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$

$$v = \pi_{U^\perp}^\perp(v) + \pi_U^\perp(v)$$

$$v - \pi_U^\perp(v) = \pi_{U^\perp}(v) \in U^\perp$$

Sia $v = (a, b, c, d)$, allora

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U^\perp \iff \begin{pmatrix} a-\alpha \\ b-\alpha \\ c-\alpha \\ d-\alpha \end{pmatrix} \in U^\perp$$

$$\iff \begin{pmatrix} a-\alpha \\ b-\alpha \\ c-\alpha \\ d-\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff a - \alpha + b - \alpha + c - \alpha + d - \alpha = 0$$

$$\iff \alpha = \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$\pi^{\perp}_{U^{\perp}}(v) = v - \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} - \frac{a+b+c+d}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3a-b-c-d\\-a+3b-c-d\\-a-b+3c-d\\-a-b-c+3d\end{pmatrix}$$

$$A_{\pi^{\perp}_{U^{\perp}},\,\mathcal{E},\,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4\\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4\\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4\\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4\end{pmatrix}$$

1c) Potevamo prevedere che A fosse simmetrica?

Una matrice è ortogon. diag. $\Leftrightarrow$ è simmetrica.

esiste una base ortogonale di autovettori

Data una base ortogonale $B$ di $U$ e una base ortogonale $B'$ di $U^{\perp}$, $B \cup B'$ è una base ortogonale per $\mathbb{R}^4$.
Rispetto alla base $B \cup B'$, la matrice di $\pi^{\perp}_{U^{\perp}}$ è diagonale.
Quindi la matrice è ortogon. diag. e deve essere simmetrica.