F9.6 Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k-4 & -1 \\ k-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per quali k, $v = (1,-1,-1)$ è autovettore di A_k?

v è autovettore di $A_k \iff A_k v = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A_k v = \begin{pmatrix} 1 - (2k-4) + 1 \\ k-2 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k+6 \\ k-2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2k+6 = \lambda & \rightarrow \quad 6 = 2 \quad \text{falso.} \\ k-2 = -\lambda & \rightarrow \quad k-2 = -2 \rightarrow k = 0 \\ -2 = -\lambda & \rightarrow \quad \lambda = 2 \end{cases}$$

il sistema non ha soluzioni, quindi v non è mai autovettore.

(b) Per quali k, 0 è autovalore di A_k?

λ è autovalore $\iff$ λ è uno zero di $p_{A_k}(x) = \det(A_k - xI)$

Quindi 0 è autovalore di $A_k \iff p_{A_k}(0) = 0 \iff \det(A_k) = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2k-4 & -1 \\ k-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(2k-4) \begin{vmatrix} k-2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(2k-4)(k-2)$$

$$= -2(k-2)^2.$$

$\det(A_k) = 0 \iff k = 2.$

(c) Determinare se A_2 è diag. e, se possibile, trovare H invertibile e D diagonale t.c. $D = H^{-1} A_2 H$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{A_2}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= -x \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{pmatrix} = -x \left((1-x)^2 - 1 \right)$$

$$= -x \left(\cancel{1} - 2x + x^2 - \cancel{1} \right)$$

$$= -x^2 (x-2).$$

$\lambda = 0$ a priori

m.a. $= 2$ non possiamo concludere nulla sulla m.g.

$V_0 = \ker(A_2 - \lambda I)$

$$= \ker(A_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad w_1 = -w_3$$

$\mathrm{rk}(A_2) = 1$

$\dim(\ker(A_2)) = 3 - \mathrm{rk}(A_2)$

$= 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow$ m.g. $= 2$

$\lambda = 2$

m.a. $= 1 \Rightarrow$ m.g. $= 1$

Possiamo concludere già adesso che A_2 è diagonalizzabile.
Ora calcoliamo D e H.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$$V_0 = \ker \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \end{array}$$

$w_1 = -w_3 \Rightarrow w_1 + w_3 = 0$

$\Rightarrow (1,0,1) \in V_0$

$w_2 = 0 \Rightarrow (0,1,0) \in V_0$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Avrei potuto anche risolvere il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$

$$V_2 = \ker (A_2 - \lambda I)$$

$$= \ker (A_2 - 2I)$$

$$= \ker \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \end{array}$$

$w_1 = w_3$

$\Rightarrow w_1 - w_3 = 0$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

colonne = autovettori (in ordine corrispondente a quello scelto per D).

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Con questa scelta, $D = H^{-1} A_2 H$

NOTA: A meno che non venga richiesto esplicitamente NON serve calcolare H^{-1}.

NOTA: Nel linguaggio delle applicazioni lineari:

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base di autovettori

$H = A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}, id} \qquad H^{-1} = A_{\mathcal{E}, \mathcal{B}, id} \qquad A_2 = A_{\mathcal{E}, \mathcal{E}, \phi}$

$$H^{-1} A_2 H = A_{\mathcal{E}, \mathcal{B}, id} \cdot A_{\mathcal{E}, \mathcal{E}, \phi} \cdot A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}, id}$$

$$= A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}, \phi}$$

$$= D$$

(d) Trovare tutti gli autovettori di A_2 che appartengono al sottospazio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=0\}$.

Autovettori di $A_2 = V_0 \cup V_2$

quindi gli autovettori cercati sono

$$(V_0 \cup V_2) \cap W = (V_0 \cap W) \cup (V_2 \cap W)$$

$v \in V_0 \cap W$: $\quad v \in V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$v = \begin{pmatrix} b \\ a \\ b \end{pmatrix} \in W \iff a = 0$$

$V_0 \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$

$v \in V_2 \cap W$: $\quad v \in V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \qquad v \in W \iff 0 = 0$$

$V_2 \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

In conclusione

$$(V_0 \cup V_2) \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) Per quali valori di h, la matrice

$$B_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h+1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è simile alla matrice A_2? Per tale valore, trovare M invertibile tale che $B_h = M^{-1} A_2 M$.

NOTA

① Dato che A_2 è diag., se B_h è simile a A_2, allora B_h deve essere diag.

② Due matrici diag. sono simili $\iff$ hanno la stessa forma diagonale.

① + ② : B_h è simile a A_2 $\Leftrightarrow$ B_h è diag. e la sua forma diagonale è $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_{B_h}(x) = \det(B_h - x \cdot I) = \det\begin{pmatrix} -x & 0 & \cancel{0} \\ h+1 & 2-x & \cancel{0} \\ 2 & 1 & \cancel{-x} \end{pmatrix}$$

$$= -x \det\begin{pmatrix} -x & 0 \\ h+1 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$= -x\,(-x)\,(2-x)$$

$$= -x^2(x-2)$$

$\lambda = 0$

$m.a. = 2$

vogliamo $m.g. = 2$

$\lambda = 2$

$m.a. = 1 \Rightarrow m.g. = 1$ ✓

$V_0 = \ker(B_h - \lambda \cdot I)$

$$= \ker(B_h) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h+1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\quad w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

$w_3 = 0$

w_1 e w_2 sono indipendenti, a meno che non siano uno multiplo dell'altro.
Questo accade se e solo se $h = 3$.

Quindi $rk(B_h) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = 3 \\ 2 & \text{se } h \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \dim(\ker(B_h)) = \begin{cases} 2 & \text{se } h = 3 \\ 1 & \text{se } h \neq 3 \end{cases}$

Altrimenti avremmo potuto usare il solito metodo della riduzione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h+1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} III \\ 2II-(h+1)III \\ I \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3-h\,? & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se $3-h=0$, cioè $h=3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se $3-h \neq 0$, cioè $h \neq 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(B_h) = 1$

$\Rightarrow \dim(\ker V_0) = 3-1 = 2$ ✓

$D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

$rk(B_h) = 2$

$\dim(\ker V_0) = 3-2 = 1$

$m.a.(0) \neq m.g(0)$

la matrice B_h

non è diag.

B_h e A_2 sono simili $\Leftrightarrow h = 3$.

Ora vogliamo trovare M t.c. $B_3 = M^{-1} A_2 M$.

$D = H^{-1} A_2 H$

$\Rightarrow H_1^{-1} B_3 H_1 = H^{-1} A_2 H$

$D = H_1^{-1} B_3 H_1$

$\Rightarrow B_3 = H_1 (H^{-1} A_2 H) H_1^{-1}$

$= H_1 H^{-1} A_2 H H_1^{-1}$

$= (H H_1^{-1})^{-1} A_2 (H H_1^{-1})$

$= M^{-1} A_2 M$

dove $M = H H_1^{-1}$.

Troviamo H_1.

$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 0 \quad m.a. = m.g. = 2$

$\lambda = 2 \quad m.a. = m.g. = 1$

$\lambda = 0$

$V_0 = \ker(B_3 - \lambda I) = \ker(B_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\quad w_1 \quad w_2 \quad w_3$

$w_1 = 2w_2 \Rightarrow w_1 - 2w_2 = 0$

$w_3 = 0$

$V_2 = \ker(B_3 - \lambda I) = \ker(B_3 - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\quad w_1 \quad w_2 \quad w_3$

$w_3 = -2w_2 \Rightarrow 2w_2 + w_3 = 0$

$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ora basta calcolare $M = H H_1^{-1}$

Es. 1 Determinare la matrice $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che
$w_1 = (3,1)$ è autovettore di autovalore 0
$w_2 = (1,-3)$ " " 2.

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = H^{-1} A H$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 2 \end{pmatrix} \qquad A = H D H^{-1}$$

Nel linguaggio delle applicazioni lineari
$\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ $\quad A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi} = D$

Vogliamo $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ che è uguale a

$$A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id}$$
$$= H \cdot D \cdot H^{-1}$$

H è una matrice 2×2 e il calcolo dell'inversa è facile:

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } \det H \neq 0 \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{\det H} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\det H = -10$

$$H^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & -3/10 \end{pmatrix}$$

$$A = H D H^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & -3/10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & -3/10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/10 & -6/10 \\ -6/10 & 18/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ -3/5 & 9/5 \end{pmatrix}.$$