EALG - Tutorato 6

Titolo nota 14/04/2021

APPLICAZIONI LINEARI

DEF Siano V, W spazi vettoriali. Un'applicazione $\phi : V \to W$ si dice lineare se

(i) $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w) \quad \forall\, v, w \in V$

(ii) $\phi(\lambda v) = \lambda\, \phi(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V e $\mathcal{B}'$ è base di W, allora possiamo scrivere la matrice di ϕ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

$$A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}', \phi} = \begin{pmatrix} \phi(v_1) & \phi(v_2) & \dots & \phi(v_n) \end{pmatrix}$$

coordinate del vettore $\phi(v_1)$ nella base $\mathcal{B}'$.

PROPRIETA'

- $\dim V = \dim(\ker\phi) + \underbrace{\dim(\operatorname{im}\phi)}_{= \ rk(A)}$

- $w \in W$,

$$\phi^{-1}(\{w\}) = \{v \in V : \phi(v) = w\} = \begin{cases} \emptyset & \text{quando } w \notin \operatorname{im}\phi \\ v + \ker\phi & \text{quando } w \in \operatorname{im}\phi, \end{cases}$$

e dove v è un qualsiasi vettore di V t.c. $\phi(v) = w$.

- Per definire un'app. lineare basta farlo sui vettori di una qualsiasi base di V.
  Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V e fissiamo $\phi(v_1) = w_1, \dots, \phi(v_n) = w_n$, allora esiste ed è unica l'applicazione lineare ϕ che soddisfa.

  infatti $v \in V \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ per certi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \phi(v) &= \phi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \phi(\alpha_1 v_1) + \dots + \phi(\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 \phi(v_1) + \dots + \alpha_n \phi(v_n) \text{ necessariamente.} \end{aligned}$$

ϕ lineare

FS. 1 Considerare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ y - z + t \\ 2x + y - t \end{pmatrix}$

(a) Verificare che ϕ è lineare e darne la matrice rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.

(i) $$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}\right) = \phi\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \\ t + t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' + y + y' + 2z + 2z' \\ y + y' - z - z' + t + t' \\ 2x + 2x' + y + y' - t - t' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x+y+2z \\ y-z+t \\ 2x+y-t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y'+2z' \\ y'-z'+t' \\ 2x'+y'-t' \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix} x'\\y'\\z'\\t' \end{pmatrix}$$

(ii) $$\phi\left(\lambda\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix}\right) = \phi\begin{pmatrix} \lambda x\\ \lambda y\\ \lambda z\\ \lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x+\lambda y+2\lambda z \\ \lambda y-\lambda z+\lambda t \\ 2\lambda x+\lambda y-\lambda t \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x+y+2z \\ y-z+t \\ 2x+y-t \end{pmatrix} = \lambda\,\phi\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix}$$

quindi ϕ e' lineare.

- Date le basi canoniche $\mathcal{E}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{E}'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ vogliamo scrivere:

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E}',\phi} = \begin{pmatrix} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \phi(e_3) & \phi(e_4) \end{pmatrix}$$

$$\phi(e_1)=\phi\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \qquad \phi(e_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \phi(e_3)=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \phi(e_4)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E}',\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Determinare $\ker\phi$, $\operatorname{im}\phi$.

$$\ker\phi = \{v\in\mathbb{R}^4 : \phi(v)=0_{\mathbb{R}^3}\} = \{v\in\mathbb{R}^4 : Av=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

3 variabili pivot

1 variabile non-pivot

(R-C): Lo spazio delle soluzioni e' descritto da 1 parametro $\Rightarrow \dim(\ker\phi)=1$.

$$\begin{cases} x+y+2z = 0 \\ y-z+t=0 \\ -5z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-y-2z=t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$$

$$\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \dim(\ker\phi)=1.$$

$$\dim(\operatorname{im}\phi) = \dim V - \dim(\ker\phi) = 4-1=3$$

$$\operatorname{im}\phi = \{w\in\mathbb{R}^3 : \exists\, v\in\mathbb{R}^4\ \phi(v)=w\}$$

perchè corrisponde ad una variabile non-pivot

$$= \langle \phi(e_1),\dots,\phi(e_4)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

indipendenti perchè corrispondono alle variabili pivot.

(c) Esiste $w\in\mathbb{R}^3$ t.c. $\phi^{-1}(\{w\})=\emptyset$?

$\dim(\operatorname{im}\phi)=3$

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \quad \Rightarrow \operatorname{im}\phi = \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \phi$ è surrettiva

$\operatorname{im}\phi \leq \mathbb{R}^3$

Non esiste tale vettore.

(d) Determinare $\phi^{-1}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$.

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : \phi(v) = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} \right\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x+y+2z = 4 \\ y-z+t = 1 \\ 2x+y-t = 2 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \cdot A \cdot v = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} \right\}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ II-2I \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & \overset{\times}{0} & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y+2z = 4 \\ y-z+t = 1 \\ -5z = -5 \end{cases} : \begin{cases} x = 4-y-2z = 4-2+t-2 = t \\ y = 1+z-t = 2-t \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} t \\ 2-t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2-t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \ker\phi.$$

come previsto $\phi^{-1}(\{w\})$ è della forma $v + \ker\phi$ con $\phi(v) = w$.

(e) Scrivere la matrice di ϕ nelle basi

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{=v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{=v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{=v_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{=v_4}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^4$$

$$\text{e } \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^3$$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B}',\phi} = \begin{pmatrix} \phi(v_1) & \phi(v_2) & \phi(v_3) & \phi(v_4) \end{pmatrix}$$

⚠ coordinate nella base $\mathcal{B}'$.

$$\phi(v_1) = \phi\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

queste sono le coordinate nella base $\mathcal{E}'$, vogliamo invece le coordinate $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ nella base $\mathcal{B}'$

$$\phi\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ y-z+t \\ 2x+y-t \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-b \\ 2a+b \\ a+b+c \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a-b = 2 \\ 2a+b = 1 \\ a+b+c = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Le coordinate di $\phi(v_1)$ nella base $\mathcal{B}'$ sono $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B}',\phi} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & & & \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

Procedendo allo stesso modo per $\phi(v_2)$, $\phi(v_3)$, $\phi(v_4)$ si ottiene

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B}',\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ -1 & -2 & -4/3 & -1/3 \\ 3 & 2 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

ES Determinare se esiste ϕ lineare soddisfacente le seguenti condizioni. Se sì, determinarle tutte e dare la matrice rispetto alle basi canoniche.

Procedimento generale per capire se una tale ϕ esista e quante ce ne siano:

1) Verificare se le condizioni date siano compatibili

2) Verificare se ϕ sia stata definita su una base del dominio.

Nota: come già osservato all'inizio, se $v = \alpha v_1 + \beta v_2$

allora $\phi(v) = \alpha\phi(v_1) + \beta\phi(v_2)$ per linearità.

(a) $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$\phi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \phi\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ϕ è definita su $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ che sono lin. indip., quindi le due condizioni sono compatibili. Per definire ϕ, dobbiamo però definire l'immagine di un terzo vettore di una base di $\mathbb{R}^3$. Completiamo i due vettori ad una base del dominio, ad esempio

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} \right\}$$

$\phi(v_1)$, $\phi(v_2)$ sono fissate, mentre possiamo scegliere arbitrariamente $\phi(v_3)$.

$$\phi(v_3) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = \begin{pmatrix} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \phi(e_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & a & -a \\ 1 & b & -1-b \\ 0 & c & 1-c \\ 1 & d & 1-d \end{pmatrix} \quad \text{in quanto}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \phi(e_3) = \phi\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\\-1-b\\1-c\\1-d\end{pmatrix}$$

(b) $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\phi\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \phi\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \phi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Verifichiamo se le condizioni siano compatibili, studiando la dipendenza lineare dei vettori su cui è definita ϕ.

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\\ II-\frac{I}{2}\\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3/2&-3/2\\0&-1&1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\\ III\\ II+\frac{3}{2}III\end{matrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Il terzo vettore dipende dai primi due e il sistema ci fornisce anche la combinazione lineare.

$$a\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}2a+b+c=0\\ -b+c=0\end{cases} \qquad \begin{cases}a=-c\\ b=c\end{cases}$$

$$c=1 \qquad -\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\phi\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\phi\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Le tre condizioni non sono compatibili $\Rightarrow$ NON esiste nessuna ϕ lineare.

(c) $\phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$\ker\phi = U$ dove $U = \begin{cases}x+y+z+t=0\\ 2x+3y-z+t=0\end{cases}$

$$\phi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad \phi\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-k\end{pmatrix} \qquad \phi\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} \qquad k\in\mathbb{R}.$$

U $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&-1&1\end{pmatrix} \quad II-2I\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-3&-1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}x+y+z+t=0\\ y-3z-t=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=-y-z-t=-4z-2t\\ y=3z+t\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-4z-2t\\3z+t\\z\\t\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-4\\3\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$U=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\3\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

La condizione $\ker\phi=U$ $\Rightarrow \phi(\;)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ che è equivalente a chiedere che l'immagine dei vettori di base di U sia $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (perché?). Cioè

$$\phi\begin{pmatrix}-4\\3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad e \quad \phi\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Le condizione su ϕ possono essere riscritte come:

$$\left[\begin{array}{lll}
\phi\begin{pmatrix}-4\\3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \phi\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \\
\phi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} & \phi\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-k\end{pmatrix} & \phi\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}
\end{array}\right.$$

Capiamo se queste condizioni siano compatibili:

$$\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}-2 & -4 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riduzione}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & \times & \end{array} \\ \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 + e v_5 = 0$$

$$\begin{cases} a+3b-c=0\\ 3b-e=0\\ 3c-3d+4e=0\\ 2e=0\end{cases} \qquad \begin{cases} a=c=d\\ b=0\\ c=d\\ e=0\end{cases}$$

$$d v_1 + 0\cdot\cancel{v_2} + d v_3 + d v_4 + 0\cdot\cancel{v_5} = 0$$

$d=1 \qquad v_4 = -v_1 - v_3$

$$\Longrightarrow \phi(v_4) = -\phi(v_1) - \phi(v_3)$$

$$\begin{pmatrix}-2\\-k\end{pmatrix} \quad - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}-2\\-k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

$k\neq 1$ le condizioni sono incompatibili, non esiste una tale ϕ.

$k=1$ le condizioni sono compatibili, quindi una tale ϕ esiste ed è unica poiché ne abbiamo definito l'immagine su v_1, v_2, v_3, v_5 e $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

(d) $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Sappiamo che se $\phi^{-1}(\{w\})$ è non vuoto, allora è della forma $v + \ker\phi$ dove v è un vettore del dominio che soddisfa $\phi(v)=w$.

Allora la condizione si può scrivere come

$$\phi\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, quindi le condizioni sono compatibili e ϕ è univ. determinata.