DEF U, W sottospazi di V, diciamo che U e W sono in somma diretta se $U \cap W = \langle 0 \rangle$. In questo caso,

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \underbrace{\cancel{\dim(U \cap W)}}_{=0}$$

DESCR. DI SOTTOSPAZI generatori $\longleftrightarrow$ eq. cartesiane (il sottospazio è dato come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.)

$\leftarrow$ basta risolvere il sistema lineare

$\rightarrow$ 2 modi: - eq. parametriche

- eq. generale.

F3 5(e) Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

$$W_1 = \langle 1+2x^2, x+x^3 \rangle \qquad W_2 = \langle 1+x^2, x^2 \rangle$$

(a) Determinare basi e dimensioni per $W_1, W_2, W_1+W_2, W_1 \cap W_2$

Dato $p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, possiamo associare a $p(x)$ il vettore di $\mathbb{R}^4$ corrispondente alle coordinate di $p(x)$ nella base $\{1, x, x^2, x^3\}$, e viceversa.

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

In questo esercizio, tratteremo i polinomi come vettori, ricordando però di riscrivere la risposta finale nella notazione dei polinomi.

Quindi $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(W_1) I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non sono multiplo uno dell'altro, quindi sono lin. indip. e $\dim W_1 = 2$ e una base è data da $\mathcal{B}_{W_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow \mathcal{B}_{W_1} = \{1+2x^2, x+x^3\}$

(W_2) Similmente,

$\dim W_2 = 2$ $\quad \mathcal{B}_{W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow \mathcal{B}_{W_2} = \{1+x^2, x^2\}$

($W_1 \cap W_2$) $v \in W_1 \cap W_2$

$$v \in W_1 \iff v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Quando $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in W_2$? $\iff \exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ t.c. $\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\iff$ il sistema di matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{array} \right)$ ha soluzione

$$\begin{array}{r} R_3 \\ R_1 - R_3 \\ R_2 \\ R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & \boxed{\beta} \\ 0 & 0 & \boxed{\beta} \end{array} \right)$$

R-C: il sistema ha soluzione $\iff$ non c'è pivot nella colonna dei termini noti.

$\iff \beta = 0$

$$v \in W_1 \cap W_2 \iff v = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\2\alpha\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

$\dim(W_1\cap W_2) = 1 \qquad \mathcal{B}_{W_1\cap W_2} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}. \quad \rightsquigarrow \mathcal{B}_{W_1\cap W_2} = \{1+2x^2\}$

W_1+W_2

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \qquad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2) = 2+2-1 = 3$$

$$W_1+W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

quindi basta scegliere 3 vettori indipendenti.

$$\mathcal{B}_{W_1+W_2} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

e verifico che i 3 vettori sono lin. indip.

$\rightsquigarrow \mathcal{B}_{W_1+W_2} = \{1+2x^2,\ x+x^3,\ x^2\}$

(b) Determinare eq. cartesiane per W_1, W_2, $W_1\cap W_2$ e W_1+W_2.

W_1 $\quad W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

usando il metodo dell'eq. generale $\qquad v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

Scriviamo un'equazione generica $ax+by+cz+dt=0$ (*) soddisfatta da tutti e soli i vettori di W_1. basta verificare (*) sui generatori di W_1.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow,\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + d = 0\end{cases} : \begin{cases} a = -2c \\ b = -d\end{cases}$$

$$(a,b,c,d) = (-2c,-d,c,d) = c(-2,0,1,0) + d(0,-1,0,1)$$

eq. cartesiane per W_1: $\begin{cases} -2x+z=0 \\ -y+t=0\end{cases} \quad \rightsquigarrow W_1 = \left\{ax^3+bx^2+cx+d : \begin{cases}-2d+b=0\\ -c+a=0\end{cases}\right\}$

(Esistono infinite altre possibilità, ad esempio: $\begin{cases} -2x+z=0 \\ -2x-y+z+t=0\end{cases}$)

W_2 $\quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

usando il metodo delle eq. parametriche $\qquad v\in W_2 \quad v = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha+\beta\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \alpha \ ✓ \\ y = 0 \\ z = \alpha+\beta \ ✓ \\ t = 0 \end{cases} : \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} y=0 \\ t=0 \end{matrix}} \\ \beta = z-\alpha = z-x \\ \alpha = x \end{cases}$$

eq. cartesiane per W_2: $\begin{cases} y=0 \\ t=0\end{cases} \quad \rightsquigarrow W_2 = \left\{ax^3+bx^2+cx+d : \begin{cases}c=0\\ a=0\end{cases}\right\}$

$\boxed{W_1 \cap W_2}$ $v \in W_1 \cap W_2 \iff v$ soddisfa sia le eq. di W_1 che quelle di W_2, quindi basta "unire" le equazioni.

$$\begin{cases} -2x+z=0 \\ \cancel{-y+t=0} \\ y=0 \\ t=0 \end{cases} : \begin{cases} -2x+z=0 \\ y=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow W_1 \cap W_2 = \left\{ ax^3+bx^2+cx+d : \begin{cases} -2d+b=0 \\ c=0 \\ a=0 \end{cases} \right\}$

$\boxed{W_1+W_2}$ $$W_1+W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

eq. param. $$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha+\gamma \\ \beta \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=\alpha \checkmark \\ y=\beta \checkmark \\ \cancel{z} = 2\alpha+\gamma \checkmark \\ t=\beta \end{cases} : \begin{cases} \boxed{t=\beta=y} \\ \alpha = x \\ \beta = y \\ \gamma = z-2\alpha = z-2x \end{cases}$$

eq. cartesiana per W_1+W_2: $t=y$ (cioè $t-y=0$)

$\rightsquigarrow W_1+W_2 = \{ ax^3+bx^2+cx+d : a-c=0 \}$.

F4.4 $$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Determinare base, dimensione e eq. cartesiane per W.

$$a\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+b-3d+e=0 \\ -a-b+c+3d+e=0 \\ a-b-3d-e=0 \\ c+2d+2e=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dopo riduzione a scala}} \begin{array}{ccccc} \checkmark & \checkmark & \checkmark & \times & \times \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vogliamo i vettori lin. indep., quindi il sistema deve dare come unica soluzione il vettore nullo (ossia i coefficienti della combinazione devono essere tutti zero).

R-C: l'insieme delle soluzioni dipende da un numero di parametri pari al numero di variabili non-pivot. Dato che chiedere che l'unica soluzione sia il vettore nullo equivale all'avere zero parametri per descrivere l'insieme delle soluzioni, tutte le variabili devono essere pivot.

Quindi una base di W è data dai vettori (cioè dalle matrici) corrispondenti alle variabili pivot.

Base per W $$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ e $\dim W = 3$.

eq. cartesiane ?

metodo 1 eq. parametriche

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & -\alpha-\beta+\gamma \\ \alpha-\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \boxed{x_{11} = 2\alpha+\beta} \ \checkmark \\ x_{12} = -\alpha-\beta+\gamma \\ \boxed{x_{21} = \alpha-\beta} \ \checkmark \\ x_{22} = \gamma \ \checkmark \end{cases} : \begin{cases} \alpha = \dfrac{x_{11}+x_{21}}{3} \\ \beta = x_{11} - 2\alpha = x_{11} - \dfrac{2}{3}(x_{11}+x_{21}) = \dfrac{x_{11}-2x_{21}}{3} \\ \gamma = x_{22} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha+\beta &= x_{11} \\ \alpha-\beta &= x_{21} \\ \hline 3\alpha + 0 &= x_{11}+x_{21} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{x_{11}+x_{21}}{3}$$

$$x_{12} = -\alpha-\beta+\gamma$$

$$= -\frac{x_{11}+x_{21}}{3} - \frac{x_{11}-2x_{21}}{3} + x_{22}$$

$$3x_{12} = -x_{11} - x_{21} - x_{11} + 2x_{21} + 3x_{22}$$

$$-2x_{11} - 3x_{12} + x_{21} + 3x_{22} = 0$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} : -2x_{11} - 3x_{12} + x_{21} + 3x_{22} = 0 \right\}.$$

metodo 2 eq. generale

$$a x_{11} + b x_{12} + c x_{21} + d x_{22} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ a - b - c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} : \begin{cases} a = -\frac{2}{3}d \\ c = a - b = -\frac{2}{3}d + d = \frac{1}{3}d \\ b = -d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2a - b + c &= 0 \\ a - b - c &= 0 \\ \hline 3a - 2b &= 0 \end{aligned}$$

$$a = \frac{2}{3}b = -\frac{2}{3}d$$

L'eq. descrive esattamente lo spazio $W \Leftrightarrow (a,b,c,d) = \left(-\frac{2}{3}d, -d, \frac{1}{3}d, d\right)$

$$= \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3}, 1\right)d$$

$-\frac{2}{3}x_{11} - x_{12} + \frac{1}{3}x_{21} + x_{22} = 0$ è un'eq. cartesiana per W.

(b) Trovare un sottospazio U tale che $U \oplus W = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- Se U e W sono in somma diretta, allora $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$
- Prendendo una base di U e una base di W, otteniamo dei generatori per $U+W$.

• In questo caso, otteniamo una base per $U+W$.

Trovare un tale sottospazio U è equivalente a completare una base di W ad una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim W = 3$, $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, quindi $\dim U = 4-3 = 1$.

Allora basta prendere una matrice di $\mathcal{B}$ lin. indip. dai vettori in $\mathcal{B}_W$.

Ad esempio: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Di tali U ce ne sono tanti)

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ES $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Mostrare che non esiste un sottospazio $U \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che

(1) $U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $U \oplus \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\dim = 2} = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. (2)

$\dim W = 3$ $\quad \dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$

Da (2) $\dim U = \dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - 2 = 2$. Inoltre

$4 \geq \dim(U+W) \overset{\text{Grassmann}}{=} \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 3 - \dim(U\cap W)$, perciò

$\dim(U \cap W) \geq 1$, contraddizione alla condizione (1).

$U+W \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

F3.12(b) Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Mostrare che $\{\alpha v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è ancora una base $\forall \alpha \neq 0$.

$\dim V = n$

$\{\alpha v_1, v_2, \dots, v_n\}$ contiene n vettori, quindi per mostrare che è una base di V, basta mostrare che tali vettori sono lin. indip.

Sia $a_1(\alpha v_1) + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \qquad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (★)

$(\alpha a_1) v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$ (#)

$\Rightarrow \begin{array}{l} \alpha a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \end{array} \quad \overset{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \end{array}$

tutti i coeff. devono essere nulli, quindi i vettori sono lin. ind.

Riflettere sulla differenza tra le scritture (★) e (#).