Esercizio simile all'esercizio 6(c) del foglio 3.

Titolo nota 14/04/2021

ES Determinare la dimensione e una base di W_1, W_2, W_1+W_2, $W_1\cap W_2$.

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} : \begin{matrix} a_{11}-2a_{12}=0\\ a_{22}+3a_{12}=0\\ a_{23}=0\end{matrix}\right\}$$

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} : \begin{matrix} a_{13}=0\\ a_{21}+a_{22}+2a_{23}=0\end{matrix}\right\}$$

W_1 Le condizioni di appartenenza sono
$$a_{11}=2a_{12}$$
$$a_{22}=-3a_{12}$$
$$a_{23}=0$$

quindi una generica matrice di W_1 è della forma $\begin{pmatrix} 2a & a & b\\ c & -3a & 0\end{pmatrix}$ $a,b,c\in\mathbb{R}$

$a_{11}=2a_{12}$ $a_{23}=0$ $a_{22}=-3a_{12}$

e $W_1=\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\rangle$

$\dim W_1=3$ (le tre matrici sono chiaramente indipendenti) e le tre matrici danno una base per W_1.

W_2 Allo stesso modo, una generica matrice di W_2 è della forma
$\begin{pmatrix} a & b & 0\\ -c-2d & c & d\end{pmatrix}$ e $W_2=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle$

$\dim W_2=4$ e le quattro matrici danno una base di W_2.

$W_1\cap W_2$ Una matrice $A\in W_1 \Leftrightarrow A$ è della forma $\begin{pmatrix} 2a & a & b\\ c & -3a & 0\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

Tale matrice appartiene anche a $W_2 \Leftrightarrow$ soddisfa le equazioni che definiscono W_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{13}=0\\ a_{21}+a_{22}+2a_{23}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0\\ c-3a+2\cdot 0=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0\\ c=3a\end{cases}$$ $A\in W_1\cap W_2 \Leftrightarrow$ è della forma $\begin{pmatrix} 2a & a & 0\\ 3a & -3a & 0\end{pmatrix}$

quindi $W_1\cap W_2=\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}\right\rangle$ e $\dim(W_1\cap W_2)=1$.

W_1+W_2

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$= 3 + 4 - 1$$
$$= 6$$

In generale, per dare una base di W_1+W_2, uniamo le basi di W_1 e W_2 e poi estraiamo una base di W_1+W_2. In questo caso, possiamo direttamente osservare che

$W_1+W_2 = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ in quanto $\dim(M_{2\times3}(\mathbb{R})) = 6$.

Una base di W_1+W_2 è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$