EALG - Tutorato 3

Titolo nota 24/03/2021

DEF V spazio vettoriale.

Un insieme finito di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice **base** di V se

(i) i vettori sono lin. indip.

(ii) " generano V.

Definiamo $\dim V = n = \#$ vettori in una qualsiasi base di V

ben definito perché due basi di V hanno sempre la stessa cardinalità.

- insieme di generatori di V $\xrightarrow{\text{togliendo vettori}}$ base
- " di vettori lin. indip. $\xrightarrow[\text{aggiungendo vettori}]{}$ base

- Formula di Grassmann. Dati U, W sottospazi di V

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

F3.4 Determinare una base di W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ e le rispettive dimensioni.

(e) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x + 2y + z - t = 0 \right\}$ — W_1 è dato come spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo.

$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ — W_2 è dato come sottospazio generato da vettori.

W_1

$x + 2y + z - t = 0$

$(1 \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad -\underline{1})$

3 variabili non-pivot

$x = -2y - z + t = -2c - b + a$
$y = c$
$z = b$
$t = a$

R-C: Lo spazio delle soluzioni dipende da 3 parametri corrispondenti alle variabili non-pivot.

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2c - b + a \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

- v_1, v_2, v_3 generano W_1
- sono lin. indipendenti? $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} : \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

NOTA: I vettori ottenuti dalla risoluzione del sistema in questo modo sono sempre indip. (perché?).

base per W_1: $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim W_1 = 3$.

(W_2) $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\0\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\\0\\4\\4 \end{pmatrix} \right\rangle$

w_1 ✓ w_2 ✓ w_3 ✓ w_4 ✗ w_5 ✗

I vettori sono linearmente indipendenti? W_2 è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. $\dim(W_2) \leq 4$.
Almeno uno dei cinque vettori deve essere lin. dipend. dagli altri.
Come possiamo estrarre una base?

metodo 1

dato un vettore, lo aggiungiamo alla base se è lin. indip. da quelli già aggiunti; altrimenti lo scartiamo.

possiamo aggiungere w_1 alla base? Sì, $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$

" w_2 " ? Sì, perché $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}$ NON sono lin. dip. (in quanto non sono multipli uno dell'altro)

w_3? $a\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$? Sì

$b=0$ $c=0$ $a=0$

w_4? $\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}}$ $\underset{w_2}{\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}}$ $\underset{w_3}{\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}}$ $\underset{w_4}{\begin{pmatrix} 3\\0\\2\\0 \end{pmatrix}}$

$$w_4 = 2w_3 + w_1 + 0 \cdot w_2$$

$w_4 \in \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ quindi NON aggiungiamo w_4.

w_5? $1 \cdot \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\0\\4\\4 \end{pmatrix}$

$$w_5 = w_1 + 2w_2 + 2w_3$$

$w_5 \in \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ quindi NON aggiungiamo w_5.

base per W_2: $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ e $\dim W_2 = 3$.

metodo 2

riduzione a scala

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 w_4 + \alpha_5 w_5 = 0 \qquad A\begin{pmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(riduzione)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivot, 2 variabili non-pivot.

R-C: lo spazio delle soluzioni dipende da 2 parametri corrispondenti alle variabili non-pivot. Quindi l'insieme dei vettori INIZIALI corrispondenti alle variabili pivot è una base per W_2 (capire bene perché)

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R-C: il sistema ha una sola soluzione. Siccome il sistema è omogeneo, base per W_2 $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ e $\dim W_2 = 3$.

questa sol deve essere il vettore nullo, quindi v_1, v_2, v_3 sono lin. ind.

$W_1 + W_2$

$$W_1 + W_2 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_2} \rangle$$

base $\mathcal{B} = \{ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \}$

non serve controllare gli altri perché un insieme di vettori indip. in $\mathbb{R}^4$ ha cardinalità al più 4.

$\dim(W_1 + W_2) = 4$

(cioè $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$)

$W_1 \cap W_2$

Grassmann $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

$$4 = 3 + 3 - 2$$

Siccome W_1 è dato in forma cartesiana, conviene partire da W_2.

$w \in W_2$ $\quad w = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c\\0\\b+c\\2b\end{pmatrix}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$w \in W_1$? $\quad W_1 = \{ \quad : x + 2y + z - t = 0\}$

$w \in W_1 \iff (a+b+c) + 2 \cdot 0 + (b+c) - 2b = 0$

$a + \cancel{b} + c + \cancel{b} + c - 2\cancel{b} = 0$

$\boxed{a = -2c}$

$w \in W_1 \cap W_2$ $\quad w = \begin{pmatrix}b-c\\0\\b+c\\2b\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$W_1 \cap W_2 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$. $\quad$ base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$.

F3.2 Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ sono sottospazi e nel caso esibire una base.

(b) $S = \{ p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] : p(x)$ ha grado al più 1 $\}$

Usiamo il criterio del sottospazio:

(i) (chiusura per somma) $\quad p(x), p(x) \in S \overset{?}{\Rightarrow} p(x) + q(x) \overset{?}{\in} S$

$p(x) = a + bx$, $q(x) = a' + b'x$ con $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$p(x) + q(x) = (a + a') + (b + b')x$ ha grado al più 1 ✓

(ii) (chiusura per prodotto scalare) $\quad p(x) \in S, \lambda \in \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} \lambda p(x) \overset{?}{\in} S$

$p(x) = a + bx \quad a, b \in \mathbb{R}$

$\lambda p(x) = \lambda a + \lambda b x$ ha ancora grado al più 1 ✓

S è un sottospazio. $\quad S = \{ a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$

$= \{ a \cdot 1 + b \cdot x : a, b \in \mathbb{R}\}$

$= \langle 1, x \rangle$

polinomio nullo $z(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\{1, x\}$ sono linearm. ind : $\alpha + \beta x = 0$

$\alpha + \beta x = 0 + 0 \cdot x$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = 0, \ \beta = 0$ ✓

Una base è data da $\{1, x\}$.

(EXTRA) $S = \{ p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] : p(0) \geq 0 \}$

(i) $p, q \in S \qquad p(0) \geq 0, \ q(0) \geq 0$

$(p+q) \in S \qquad (p+q)(0) = p(0) + q(0) \geq 0$ ✓

(ii) $p \in S \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad p(0) \geq 0$

$\lambda p \in S \qquad \lambda p(0) \overset{?}{\geq} 0$ falso se λ è negativo.

Dobbiamo dare un esempio concreto

$p(x) = 1 + x \in S$ perché $p(0) = 1 \geq 0$

$\lambda = -1 \qquad -p(x) \notin S$ perché $-p(0) = -1 < 0$.

S non è un sottospazio.

Es (lasciato a lezione) Dimostrare che $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è un sottospazio.

$S = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$

Applichiamo il criterio del sottospazio.

(i) $w_1, w_2 \in S \qquad w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$w_2 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$w_1 + w_2 = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \in S$ ✓

(ii) $w_1 \in S \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\lambda w_1 = (\lambda \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda \alpha_n) v_n \in S$ ✓

S è un sottospazio.

VERO o FALSO?

- Dati $v_1, \dots, v_4$ lin. ind. $\Rightarrow v_1, \dots, v_3$ sono lin. ind. ?

VERO Sia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + 0 \cdot v_4 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 0, \ 0 = 0$.

- Dati $v_1, \dots, v_4$ lin. dip $\Rightarrow v_1, \dots, v_3$ sono lin. dip. ?

FALSO $V = \mathbb{R}^3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = v_3$.

- v_1, v_2, v_3 lin. dip., v_1, v_2 lin indip. $\Rightarrow v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$?

VERO Esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ con $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$

$\frac{\alpha_3 v_3}{\alpha_3} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} v_2 \rightarrow v_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} v_2$ ✓

possiamo dividere perché $\alpha_3 \neq 0$: se fosse $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ con $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ contraddizione.