EALG - Tutorato 2

Titolo nota 17/03/2021

SOTTOSPAZI VETTORIALI

DEF V spazio vettoriale. $U \subseteq V$ non vuoto è un sottospazio se le operazioni di somma e prodotto per scalare definite su V inducono su U una struttura di spazio vettoriale.

CRITERIO Un sottoinsieme U non vuoto di V è sottospazio vettoriale

$\iff$ (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall v \in U$, $\lambda \cdot v \in U$ chiusura per prodotto per scalare

(ii) $\forall v, w \in U$, $v + w \in U$ chiusura per somma di vettori

Dati $U, W \leq V$, $U \cap W$ è sempre un sottospazio, mentre la loro unione potrebbe non esserlo. Definiamo $U + W$ il più piccolo sottospazio di V che contiene $U \cup W$.
Si può dimostrare che $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$.

ESERCIZIO 1. Verificare se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi. In caso affermativo, trovare un insieme di generatori.

(a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - 4z = 0 \right\}$

CRITERIO (i) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in U$, è vero che $\lambda v \in U$?

$v \in U \iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $x + y - 4z = 0$

$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ $\quad (\lambda x) + (\lambda y) - 4(\lambda z) = \lambda \overbrace{(x + y - 4z)}^{\overset{0}{\shortparallel}} = 0$

$\Rightarrow \lambda v \in U$.

(ii) Siano $v, w \in U$ è vero che $v + w \in U$?

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $x + y - 4z = 0$, $\quad w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ e $x' + y' - 4z' = 0$

$v + w = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ $\quad (x + x') + (y + y') - 4(z + z') =$

$= \underbrace{(x + y - 4z)}_{0} + \underbrace{(x' + y' - 4z')}_{0} = 0$

$v + w \in U$.

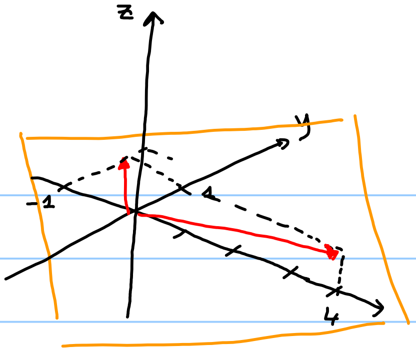
U è sottospazio.

$x + y - 4z = 0$ ha come soluzione

$(1 \ \ 1 \ \ -4 \mid 0)$ $\quad \begin{aligned} x &= -y + 4z = -t + 4s \\ y &= t \\ z &= s \end{aligned}$ $\quad \begin{pmatrix} -t + 4s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tutte le soluzioni sono combinazioni lineari di $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e viceversa ogni loro comb. lineare è una soluzione.

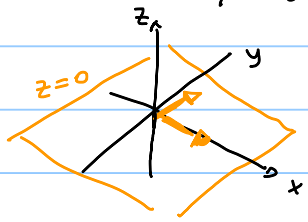
$U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ = piano che contiene i vettori $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passa per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



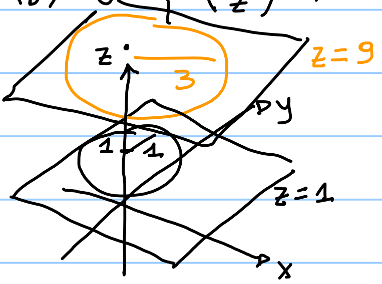
Esempio $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle =$

$= \left\{ s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix}s\\t\\0\end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$



(b) $U = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \right\}$

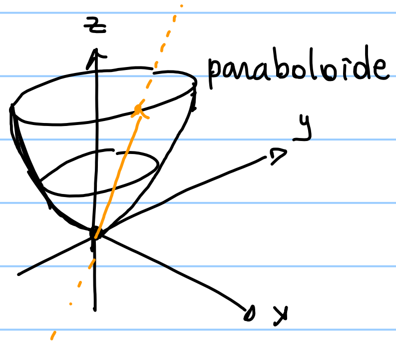


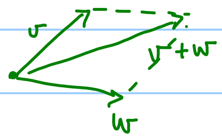
se $z = 9$ $\quad x^2 + y^2 = 9$ è una circonferenza

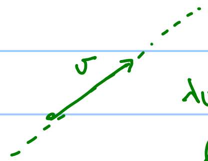
se $z = 1$ $\quad x^2 + y^2 = 1$

se $z < 0$ $\quad x^2 + y^2 \neq z$

perché $x^2 + y^2 \geq 0$







λv al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ descrive la retta contenente v.

Non è un sottospazio perchè $v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \in U$ in quanto $1^2 + 1^2 = 2$

ma $2v = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} \notin U$ " $2^2 + 2^2 \neq 4$.

(c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{matrix} a = c \\ d + e = f \end{matrix} \right\}$

CRITERIO (i) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in U$ $\qquad \lambda v \in U$?

$v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad a = c$ e $d + e = f$

$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$

$\lambda a = \lambda c \iff \lambda(a - c) = 0$ vero perchè $a - c = 0$

$\lambda d + \lambda e = \lambda f \iff \lambda(d + e - f) = 0$ vero perchè $d + e - f = 0$.

$\lambda v \in U$

(ii) Siano $v, w \in U$. $\qquad v + w \in U$?

$v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a = c \\ d + e = f \end{matrix} \qquad w = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a' = c' \\ d' + e' = f' \end{matrix}$

$v + w = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ d + d' & e + e' & f + f' \end{pmatrix}$

$a + a' = c + c'$ ✓

$(d + d') + (e + e') = f + f'$. ✓

$v + w \in U$

U è un sottospazio vettoriale.

NOTA • generatori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

• generatori di $M_{2\times3}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \dots + f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{2\times3}(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Troviamo ora i generatori di $U = \left\{ \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} : \begin{matrix}a=c\\d+e=f\end{matrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}a=c\\d+e=f\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&a\\d&e&f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a✓&b✓&a✓\\d✓&e✓&d✓+e✓\end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

ESERCIZIO 2 Considerate

$$S = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad T = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in S$?

(b) Trovare generatori per $S\cap T$, $S+T$.

(c) È vero che $S+T = \mathbb{R}^3$?

(a) $v \in S \iff v$ può essere scritto come combinazione lineare di $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$

$\iff \exists\, a,b \in \mathbb{R}$ $v = a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\4b\\-3a-b\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}a\\4b\\-3a-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ 4b = 1 \\ -3a-b = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a=2 \\ b = 1/4 \\ -6-\frac{1}{4} \neq 1 \end{matrix}$$ il sistema non ha soluzioni

$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \notin S$.

(b) Generatori di $S+T$ $\qquad S+T = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$

Dati un insieme di generatori di S e un insieme di generatori di T, allora l'unione dei due insiemi è un insieme di generatori per $S+T$. (vero per ogni S,T).

Generatori di $S \cap T$

$v \in S \cap T \iff v \in S$ e $v \in T$

$$v \in S \iff v = a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\4b\\-3a-b\end{pmatrix} \qquad (\star)$$

$$v \in T \iff v = c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c+2d\\-d\\3d\end{pmatrix} \qquad (\#)$$

$$v \in S \cap T \iff \begin{pmatrix}a\\4b\\-3a-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c+2d\\-d\\3d\end{pmatrix}$$ capiamo quando ciò è possibile.

$$\begin{cases} a = c+2d \\ 4b = -d \\ -3a-b = 3d \end{cases} \; : \; \begin{cases} a \quad -c-2d = 0 \\ 4b \quad +d = 0 \\ -3a-b \quad -3d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad III+3I \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ -III \\ II \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad III-4II \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -12 & -35 \end{pmatrix}$$

R-C: l'insieme delle soluzioni dipende da un parametro.

$$\begin{cases} a \quad -c-2d = 0 \\ b + 3c + 9d = 0 \\ -12c - 35d = 0 \end{cases}$$

$d = s$

$c = -\frac{35}{12}s$

$b = -3c - 9d = \frac{35}{4}s - 9s = -\frac{s}{4}$

$a = c + 2d = -\frac{35}{12}s + 2s = -\frac{11}{12}s$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{11}{12}s\\-\frac{1}{4}s\\-\frac{35}{12}s\\s\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-11/12\\-1/4\\-35/12\\1\end{pmatrix} \qquad s \in \mathbb{R}$$

$$v = \begin{pmatrix}a\\4b\\-3a-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{11}{12}s\\-s\\3s\end{pmatrix}$$

$$-3a-b = \frac{11}{4}s + \frac{s}{4} = \frac{12}{4}s = 3s$$

$$= s\begin{pmatrix}-11/12\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix}-11/12\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

(d) $S+T = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle \overset{?}{=} \mathbb{R}^3$

$v \in \mathbb{R}^3 \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad v \in S+T \iff$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ per qualche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Vogliamo capire per quali $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, il sistema

$$\begin{cases} a + c + 2d = x \\ 4b - d = y \\ -3a - b + 3d = z \end{cases}$$

ha soluzione. (Le incognite sono a, b, c, d).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 4 & 0 & -1 & y \\ -3 & -1 & 0 & 3 & z \end{array}\right) \quad \underset{III+3I}{\longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 4 & 0 & -1 & y \\ 0 & -1 & 3 & 9 & z+3x \end{array}\right)$$

$$\underset{II \leftrightarrow III}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 3 & 9 & z+3x \\ 0 & 4 & 0 & -1 & y \end{array}\right) \quad \underset{III+4II}{\longrightarrow} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 3 & 9 & z+3x \\ 0 & 0 & 12 & -35 & y+4z+12x \end{array}\right)$$

R-C : non c'è pivot nella colonna dei termini noti, quindi il sistema ha soluzione (qualsiasi sia il valore di x, y, z).

Quindi $S+T = \mathbb{R}^3$.