EALG - Tutorato 1

Titolo nota 10/03/2021

AMEDEO SGUEGLIA
a.sgueglia@lse.ac.uk

Risoluzione di sistemi lineari

$Ax = b$ ← colonna dei termini noti

↑ matrice dei coefficienti

ESEMPIO
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Associamo al sistema $Ax=b$ la matrice $(A|b)$

Se la matrice $(A|b)$ è a gradini, allora è "facile" trovare le soluzioni.

ESEMPIO

pivot

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

0 variabili non-pivot

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$x_4 = t \quad t \in \mathbb{R}$

$x_3 = -1 + 2x_4 = -1 + 2t$

$x_1 = 2 + x_3 - x_4 = 2 - 1 + 2t - t = 1 + t$

$x_2 = s \quad s \in \mathbb{R}$

soluzioni sono della forma $(1+t, s, -1+2t, t) \quad s,t \in \mathbb{R}$.

TEOREMA (Rouché-Capelli) Il sistema ha soluzione se e solo se non c'è pivot nella colonna dei termini noti. Inoltre se ha soluzioni, il numero di parametri necessari a descrivere le soluzioni è uguale al numero di variabili non-pivot.

Cosa fare quando $(A|b)$ non è in forma a gradino?

Possiamo effettuare 3 operazioni su $(A|b)$ senza cambiarne l'insieme delle soluzioni:
1. moltiplicare una riga per un numero reale $\neq 0$.
2. riordinare le righe
3. sommare due righe

ESERCIZIO
$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \\ 6x + 4z = 8 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

zero

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \\ \mathrm{III}-3\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mathrm{II}-\mathrm{I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

R-C : il sistema ha soluzione e il numero di parametri per descrivere le soluzioni è 0.
cioè c'è un'unica soluzione.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -3y + 5z = 2 \\ 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4/3 \\ y = -2/3 \\ z = 0 \end{cases}.$$

ESERCIZIO Trovare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni di

$$\begin{cases} x + kz = -k \\ -x + y + z = k \\ x + ky + kz = 1 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ -1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & k & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & 1+k & 0 \\ 0 & k & 0 & 1+k \end{array}\right)$$

Se $k=0$, la matrice è a scalino $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ non ha soluzioni (R-C)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 1 \text{ falso} \end{cases}$$

Se $k \neq 0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & 1+k & 0 \\ 0 & k & 0 & 1+k \end{array}\right)$ $\mathrm{III} - \overset{\neq 0}{k}\,\mathrm{II}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & -k(1+k) & 1+k \end{array}\right)$

se $-k(1+k) \neq 0$ allora $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & -k(1+k) & 1+k \end{array}\right)$ R-C il sistema ha soluzione unica (trovatela)

se $-k(1+k) = 0$ allora
- $k=0$ già trattato ($k \neq 0$)
- $k=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

non c'è pivot nella colonna dei termini noti
$\Rightarrow$ (R-C) il sistema ha soluzione.

parametri $= 1$.

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1+s \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} 1+s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$k = 0$ no sol.

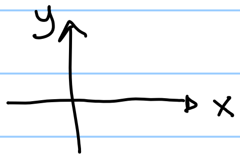
$k = -1$ $\begin{pmatrix} 1+s \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

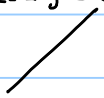
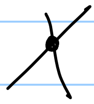
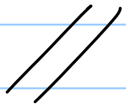
$k \neq 0, -1$ unica soluzione.

ESERCIZIO / DISCUSSIONE Descrivere quali insiemi possono essere l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in 2 equazioni e 2 incognite.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

x, y incognite.



- $a = b = \dots = f = 0$ piano $\longleftrightarrow$ $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} x & y \end{array} \end{array}$
- rette  $\longleftrightarrow$ $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} & y \end{array} \end{array}$
- punto  $\longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \end{array}\right)$
- insieme vuoto  $\longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$