Lezione 17

Esercizi di ricapitolazione

Esercizio 17.1 In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare usuale:
i) determinare il luogo dei punti aventi distanza 3 dal piano $-2x+y+z+5=0$.
ii) Determinare il luogo dei punti equidistanti dai due punti $A=(1,0,4)$ e $B=(3,5,1)$.
iii) Trovare le rette parallele al piano $3x+12y-4z-13=0$ aventi distanza 1 da esso e incidenti gli assi y e z.

Svolgimento. *i)* I punti che godono di questa proprietà sono i punti che stanno sui due piani paralleli al piano dato e aventi distanza da tale piano pari a 3. Il fascio di piani paralleli al piano dato ha equazione $-2x+y+z+\alpha=0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Indichiamo con π_α il generico piano del fascio. Tra i piani del fascio dobbiamo trovare quelli che distano 3 dal piano dato. Ora essendo piani paralleli ogni punto di π_α ha la stessa distanza dal piano di partenza $-2x+y+z+5=0$: basterà imporre che tale distanza sia 3. Un punto su π_α può essere scelto ponendo $x=y=0$: $(0,0,-\alpha)$. La sua distanza dal piano $-2x+y+z+5=0$ è (si veda l'Esempio 16.3.5):

$$\frac{|-\alpha+5|}{\sqrt{4+1+1}};$$

dobbiamo determinare α in modo che tale distanza sia 3:

$$\frac{-\alpha+5}{\sqrt{4+1+1}}=3 \quad \text{o} \quad \frac{-\alpha+5}{\sqrt{4+1+1}}=-3$$

otteniamo $\alpha=-3\sqrt{6}+5$ e $\alpha=3\sqrt{6}+5$.
ii) Se fossimo in un piano tale luogo sarebbe l'asse del segmento individuato dai due punti. Ma in questo caso siamo nello spazio: i due punti non

individuano un solo piano ma un fascio di piani di sostegno la retta individuata dai due punti. Su ognuno di questi piani il luogo di punti equidistanti da A e B è ora una retta e l'insieme di tutte queste rette sarà il luogo cercato. Non è difficile convincersi che l'insieme di queste rette individua un piano che passa per il punto medio del segmento di estremi A e B ed è ortogonale ad esso (si veda anche l'Esercizio 16.2.5). Il punto medio del segmento di estremi A e B è $M = (\frac{1+3}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{4+1}{2}) = (2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Ora occorre trovare la giacitura del piano cercato. Il vettore che congiunge A e B è $A-B = (1-3, 0-5, 4-1) = (-2, -5, 3)$. La giacitura del piano ortogonale a tale vettore è $-2x - 5y + 3z = 0$. Il piano che cerchiamo avrà dunque equazione $-2x - 5y + 3z + d = 0$, con $d \in \mathbb{R}$. Per determinare d imponiamo il passaggio per il punto M: $-2(2) - 5(\frac{5}{2}) + 3(\frac{5}{2}) + d = 0$, da cui $d = 9$. Il piano cercato è il piano di equazione $-2x - 5y + 3z + 9 = 0$.

iii) Per risolvere questo quesito vi sono vari metodi: cerchiamo di usarne uno che utilizzi le informazioni finora raccolte nell'esercizio. Per ipotesi le rette cercate sono parallele al piano di equazione $3x + 12y - 4z - 13 = 0$ e quindi dovranno stare su un piano ad esso parallelo, e poiché sono parallele al piano di equazione $3x + 12y - 4z - 13 = 0$ ogni loro punto deve avere da esso la stessa distanza pari a 1 (per ipotesi). Quindi le rette che cerchiamo devono stare su un piano parallelo a $3x+12y-4z-13=0$ e avente distanza 1 da esso. Inoltre ciascuna di queste rette è incidente sia l'asse y che l'asse z: dovrà essere pertanto complanare sia con l'asse z che con l'asse y: il solo piano contenente l'asse y e l'asse z è il piano individuato dai due assi, cioè il piano di equazione $x = 0$. Quindi le rette cercate dovranno stare su questo piano. Determiniamole. Troviamo prima i due piani paralleli a $3x + 12y - 4z - 13 = 0$ e aventi distanza 1 da esso. Come in *i*): tali piani avranno equazione del tipo $3x+12y-4z+\beta = 0$ con $\beta \in \mathbb{R}$. Sia π_β un piano generico di questo fascio. Scegliamo un punto di π_β e imponiamo che la sua distanza da $3x + 12y - 4z - 13 = 0$ sia 1. Un punto di π_β è $(-\beta/3, 0, 0)$. La distanza di $(-\beta/3, 0, 0)$ da $3x + 12y - 4z - 13 = 0$ è:

$$\frac{|-\beta - 13|}{\sqrt{9 + 144 + 16}}$$

le due equazioni che si ottengono uguagliando la precedente distanza a 1 sono: $-\beta - 13 = 13$ e $-\beta - 13 = -13$, cioè $\beta = -26$ e $\beta = 0$. I due piani su cui gacciono le rette cercate sono $3x+12y-4z-26=0$ e $3x+12y-4z=0$. Ma tali rette devono pure giacere nel piano $x = 0$. In conclusione le due rette

sono:
$$\begin{cases} 3x + 12y - 4z - 26 = 0 \\ x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 12y - 4z = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

L'esercizio sembrerebbe risolto, ma in effetti quello che abbiamo imposto è solamente che le rette fossero complanari con gli assi y e z, ma non che li intersecassero! Le rette trovate potrebbero essere parallele e non incidenti uno di questi assi. Dobbiamo controllare che questo non accada, perché in tal caso le rette trovate non sarebbero soluzioni del problema. Qual è la loro giacitura? Per entrambe le rette si ha $x = 0$ e $3x + 12y - 4z = 0$: la loro giacitura è $\langle(0, 1, 3)\rangle$, pertanto nessuna delle due rette è parallela ai due assi (la giacitura dell'asse y è $(0, 1, 0)$ e la giacitura dell'asse z è $(0, 0, 1)$). Ambedue sono soluzioni accettabili del problema.

Esercizio 17.2 Nello spazio euclideo usuale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, in coordinate x, y, z, si considerino due rette sghembe r_1 e r_2 la cui retta di minima distanza sia la retta s di equazioni
$$s = \begin{cases} 2x - z = 1 \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$$
Determinare le due rette r_1 e r_2 e calcolarne la distanza sapendo che r_1 passa per $P_1 = (1, 1, 0)$ e r_2 passa per $P_2 = (1, 0, 1)$.

Svolgimento. Ricordiamo innanzitutto che cosa si intende per "retta di minima distanza" tra r_1 e r_2. Sappiamo che date due rette sghembe r_1 e r_2 esistono due punti Q_1 e Q_2, appartenenti alle rette r_1 e r_2 rispettivamente, la cui distanza realizza la distanza tra le due rette (cioè la minima distanza tra un punto di r_1 e un punto di r_2): la retta passante per tali due punti si chiama retta di minima distanza tra r_1 e r_2. Una volta chiarito questo fatto, possiamo andare ancora più a fondo nelle nostre conoscenze e ricordare che la direzione individuata dai punti di minima distanza è perpendicolare alle rette r_1 e r_2. Conclusione: la retta s cercata è perpendicolare alle rette r_1 e r_2. Ora, la giacitura della retta s è data dallo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo
$$s = \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y - 2z = 0, \end{cases}$$
cioè dal sottospazio $\langle(1, 3, 2)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$. Quindi il fascio di piani perpendicolari ad s ha equazione $x + 3y + 2z + \alpha = 0$, al variare di α in $\mathbb{R}$. Per ipotesi il punto $P_1 = (1, 1, 0)$ appartiene alla retta r_1. Ora la retta r_1 è perpendicolare a s quindi sta su un piano che contiene il punto P_1 e che è perpendicolare a

s: è il piano del fascio individuato che passa per P_1: $(1)+3(1)+2(0)+\alpha = 0$, cioè $\alpha = -4$; il piano è $x+3y+2z-4 = 0$. Ma su r_1 abbiamo anche un'altra informazione: r_1 interseca la retta s. Riassumiamo quello che sappiamo: la retta r_1 sta sul piano di equazione $x+3y+2z-4 = 0$, passa per il punto P_1 e incontra la retta s. Per determinare r_1 basterà trovare il punto di incontro tra la retta s e il piano di equazione $x+3y+2z-4 = 0$. Le coordinate di tale punto sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} x+3y+2z-4=0 \\ 2x-z=1 \\ x+y-2z=0. \end{cases}$$

In forma matriciale abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice incompleta del sistema ha rango 3, in quanto è una matrice quadrata di determinante diverso da zero (verificare!). Quindi il sistema ammette una e una sola soluzione. Per sostituzione si ottengono le coordinate del punto $Q_1 = (\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7})$. Quindi la retta r_1 è la retta passante per Q_1 e P_1. Cerchiamo la retta r_2. In questo caso nel fascio di piani $x+3y+2z+\alpha = 0$, prendiamo quello che passa per $P_2 = (1,0,1)$: $1+3(0)+2(1)+\alpha = 0$, $\alpha = -3$. Il piano su cui giace la retta r_2 è pertanto $x+3y+2z-3 = 0$. Troviamo il punto di intersezione di questo piano con la retta s:

$$\begin{cases} x+3y+2z-3=0 \\ 2x-z=1 \\ x+y-2z=0. \end{cases}$$

In forma matriciale abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e la soluzione è $Q_2 = (\frac{3}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{7})$. La retta r_2 passa per P_2 e Q_2. Ora questi dati ci permettono di determinare le due rette: r_1 è data da $P_1 + \langle P_1 - Q_1\rangle = (1,1,0) + \langle(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{5}{7})\rangle$. Così come $r_2 : P_2 - \langle(P_2 - Q_2)\rangle = (1,0,1) + \langle(\frac{11}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{3}{7})\rangle$. Per quanto riguarda la distanza sappiamo che la retta di minima distanza interseca le rette r_1 e r_2 nei punti di minima distanza. Tali punti sono quindi Q_1 e Q_2 e la distanza tra le due rette è la distanza tra questi due punti: $\|Q_1 - Q_2\| = \|(\frac{9}{14}, \frac{3}{14}, \frac{6}{7})\| = \frac{\sqrt{126}}{14}$.

Esercizio 17.3 Nello spazio euclideo usuale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, in coordinate x, y, z, si considerino le due rette sghembe l e m:

$$l = \begin{cases} 2x + z = 4 \\ 2x + 2y + 3z - 8 = 0, \end{cases} \qquad m = \begin{cases} x - z = 18 \\ 2y - z - 10 = 0. \end{cases}$$

Si determini il piano ρ parallelo ad entrambe ed equidistante da esse e le proiezioni ortogonali l' e m' di l e m su ρ.

Svolgimento. Cos'è un piano parallelo a due rette? È, per definizione, un piano la cui giacitura contenga la giacitura di entrambe le rette. Ma la giacitura di un piano è uno spazio vettoriale di dimensione due: sarà quindi generato dalle direzioni delle due rette (ovviamente se non sono parallele, perché altrimenti lo spazio generato avrebbe dimensione 1). Ora scriviamo le rette in forma parametrica. La giacitura di l è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

cioè dal sottospazio: $\langle(1, 2, -2)\rangle$, mentre un punto di l è $(2, 2, 0)$; perciò l è la retta $(2, 2, 0) + \langle(1, 2, -2)\rangle$. Mediante calcoli analoghi si ottiene la forma parametrica della retta m: $(0, -4, -18) + \langle(2, 1, 2)\rangle$. Ora, il piano ρ deve contenere le giaciture di l e m: pertanto la giacitura di ρ è $\langle(1, 2, -2)\rangle + \langle(2, 1, 2)\rangle = \langle(1, 2, -2), (2, 1, 2)\rangle$. Da questi dati possiamo allora dedurre l'equazione del fascio di piani paralleli a ρ. Infatti, la giacitura di ρ ha equazione (omogenea) del tipo $ax + by + cz = 0$ tale che lo spazio delle sue soluzioni sia $\langle(1, 2, -2), (2, 1, 2)\rangle$. Ne consegue che a, b, c debbono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} a(1) + b(2) + c(-2) = 0 \\ a(2) + b(1) + c(2) = 0 \end{cases}$$

che è risolto, ad esempio, da $a = -2, b = 2, c = 1$. Il fascio di piani paralleli al piano cercato è: $-2x + 2y + z + \alpha = 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Ora tale piano deve essere equidistante dalle due rette l e m. La distanza di una retta da un piano ad essa parallelo è la distanza dal piano di un suo qualsiasi punto. Scegliamo il punto $(2, 2, 0)$ di l e il punto $(0, -4, -18)$ di m. La distanza