25/05/2021 Lez. 12 Algebra - Paolo Rossi

Spazi Affini Metrici:

Def (Spazio Euclideo): Abbiamo definito lo spazio (risp. piano) affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ (risp. $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$) come un insieme di punti $X=\mathbb{R}^3$ (risp. $X=\mathbb{R}^2$) su cui agisce lo spazio vettoriale $V=\mathbb{R}^3$ (risp. $V=\mathbb{R}^2$). Se su V consideriamo pure il prodotto scalare usuale chiameremo $(\mathbb{A}^3(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio Euclideo usuale. In questo modo si ha ad esempio che la distanza tra $P_1=(1,3)^T$, $P_2=(1,1)^T$ è data dalla norma del vettore P_1-P_2 (coincidente con la norma del suo opposto P_2-P_1) $\longrightarrow \|P_1-P_2\|_2=\|P_2-P_1\|_2=$

$$=\sqrt{\langle (P_2-P_1),(P_2-P_1)\rangle}=\sqrt{2^2+0^2}=2$$

Perpendicolarità:

Def: Due rette r_1 e r_2 sono ortogonali se i rispettivi vettori direttori v_1 e v_2 sono ortogonali. Una retta r è ortogonale ad un piano π se il vettore direttore v di r è ortogonale alla giacitura V di π: $v\in V^\perp$. Due piani π_1 e π_2 di giacitura V_1 e V_2, rispettivamente, sono ortogonali se $V_1^\perp$ è ortogonale a $V_2^\perp$.

Esempio: In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ consideriamo la retta $r:(1,2,3)^T+\langle(1,1,1)^T\rangle$. Troviamo una retta ad essa perpendicolare. Una retta perpendicolare a r è

②

data per definizione da una retta del tipo $P + \langle(\alpha,\beta,\gamma)^T\rangle$ con

$\left\langle \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle = 0$. Sappiamo che $\mathbb{R}^3 = \langle(1,1,1)^T\rangle \oplus \langle(1,1,1)^T\rangle^\perp$.

$(\alpha,\beta,\gamma)^T \in \langle(1,1,1)^T\rangle^\perp$ $\longrightarrow$ $(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = 0$

$\beta = -\alpha-\gamma$, $\alpha,\gamma \in \mathbb{R}$

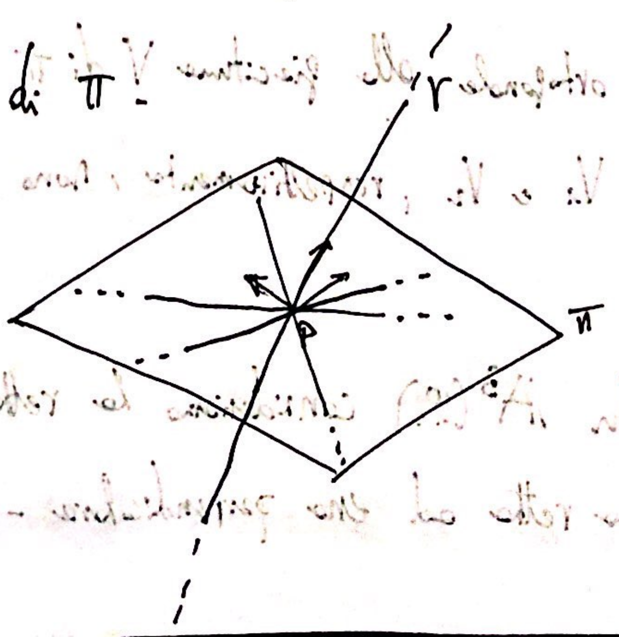
$\mathrm{Ker}(1\ 1\ 1) = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w = (\alpha, -\alpha-\gamma, \gamma)^T, \alpha,\gamma \in \mathbb{R}\}$

$= \langle(1,-1,0)^T, (0,1,-1)^T\rangle = \langle(1,1,1)^T\rangle^\perp$

Una retta per P perpendicolare alla retta r è dunque una retta per P la cui giacitura appartiene allo spazio $\langle(1,1,1)^T\rangle^\perp$, cioè una retta della forma $P + \langle(\alpha,-\alpha-\gamma,\gamma)^T\rangle$ per qualche $\alpha,\gamma \in \mathbb{R}$, $(\alpha,\gamma)\neq(0,0)$.

In particolare esistono infinite rette per P perpendicolari a r, mentre il piano per P ortogonale alla retta r è unico. Tale piano ha giacitura $\langle(1,1,1)^T\rangle^\perp$:

$\pi : P + \langle(1,1,1)^T\rangle^\perp$. Imporre che un punto $P_0 = (x_0,y_0,z_0)^T \in \pi$ con π di equazione $ax+by+cz+d=0$ equivale a richiedere che $(x_0,y_0,z_0)^T$ sia soluzione particolare dell'eq. di π.



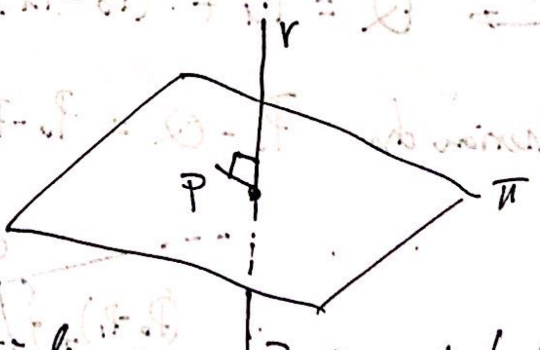
Esempio: In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ un piano π ha equazione $ax+by+cz+d=0$ e la sua giacitura è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dim 2 dato da $\langle v, w \rangle$ ove $v, w \in \mathbb{R}^3$ e le loro coordinate soddisfano l'equazione $ax+by+cz=0$ -

Del resto questa equazione si può leggere come

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

allora dire che i vettori v, w soddisfano l'equazione $ax+by+cz=0$ equivale a dire che $\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, v \right\rangle = 0$ e $\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, w \right\rangle = 0$!

Cioè $\langle (a,b,c)^T \rangle = \langle v, w \rangle^{\perp}$. Ne deduciamo che dato il piano π di equazione $ax+by+cz+d=0$ il vettore $(a,b,c)^T$ è ortogonale a π. Se P è un punto del piano allora la retta per P perpendicolare a π è $r: P + \langle (a,b,c)^T \rangle$



Def (Distanza tra sottovarietà lineari):

Siano $S_1 = P_1 + V_1$, $S_2 = P_2 + V_2$ due sottovarietà lineari con P_1, P_2 punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ e V_1, V_2 sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Dist}(S_1, S_2) = \min_{\substack{P \in S_1 \\ Q \in S_2}} \left(\|P - Q\|_2 \right)$$

cioè la minima tra le norme di tutti i vettori che congiungono un punto che appartiene alla prima sottovarietà con un punto che appartiene alla seconda -

Distanza Punto-retta in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$: Consideriamo nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ una retta r di equazione $ax+by+c=0$ e il punto $P_0=(x_0,y_0)^T$. La giacitura della retta è $\langle(-b,a)^T\rangle$ e lo spazio ad essa ortogonale è $\langle(-b,a)^T\rangle^{\perp}=\langle(a,b)^T\rangle$. $\mathbb{R}^2=\langle(-b,a)^T\rangle\oplus\langle(a,b)^T\rangle$.

Consideriamo adesso un punto $P_1=(x_1,y_1)^T$ di r ossia t.c. $ax_1+by_1+c=0$.

Prendiamo il vettore che congiunge P_1 e $P_0=(x_0,y_0)^T$:

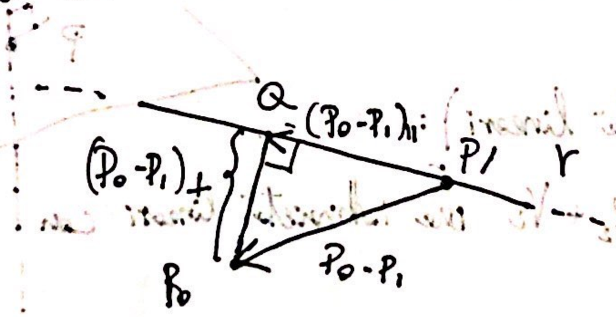
$P_0-P_1=(x_0-x_1,y_0-y_1)^T$ e determiniamone la componente parallela e perpendicolare alla giacitura di r:

$$P_0-P_1=(P_0-P_1)_{\parallel}+(P_0-P_1)_{\perp}\in\langle(-b,a)^T\rangle\oplus\langle(a,b)^T\rangle$$

$(P_0-P_1)_{\parallel}\in\langle(-b,a)^T\rangle$ giacitura di r

$$\longrightarrow\quad Q=P_1+(P_0-P_1)_{\parallel}\in r$$

Osserviamo che $P_0-Q=P_0-P_1-(P_0-P_1)_{\parallel}=(P_0-P_1)_{\perp}\in\langle(a,b)^T\rangle$



Q è il punto che realizza la minima distanza tra P_0 ed r.

Infatti ogni altro punto di r si può scrivere come $Q+w$ ove $w\in\langle(-b,a)^T\rangle$.

Ora $P_0-(Q+w)=(P_0-Q)+(-w)$ è somma di due vettori ortogonali

$\|P_0-(Q+w)\|^2=\|P_0-Q\|^2+\|-w\|^2\geq\|P_0-Q\|^2$ ossia ciascun punto $\in r$ dista da P_0 più di Q. La ~~distanza~~ distanza tra P_0 e r è la norma di P_0-Q che è la norma della componente ortogonale del vettore P_0-P_1 rispetto alla giacitura di r.

Per ottenere la componente ortogonale del vettore $P_0 - P_1$ normalizziamo il vettore $(a,b)^T$: $u = \dfrac{(a,b)^T}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e calcoliamo

$$\left\langle (P_0-P_1), \frac{(a,b)^T}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\rangle \underbrace{\frac{(a,b)^T}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\text{norma}=1}$$

$$\mathrm{Dist}(P_0,r) = \| \langle (P_0-P_1), u \rangle u \| = \| \langle (P_0-P_1), u \rangle \| =$$

$$= \left\| (x_0-x_1, y_0-y_1)^T, \frac{(a,b)^T}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\| = \frac{|ax_0+by_0-ax_1-by_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$P_1 = (x_1,y_1)^T$ nel particolare tc $ax_1+by_1+c=0$

$c = -ax_1 - ay_1$

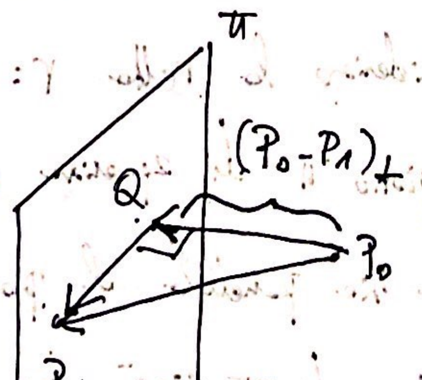
$(a,b,c)^T$ noti

La distanza tra due rette parallele è data dalla distanza di un qualsiasi punto di r_1 da r_2.

Distanza PUNTO - PIANO in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$P_0 = (x_0,y_0,z_0)^T$, $\pi: ax+by+cz+d=0$

$$\mathrm{Dist}(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

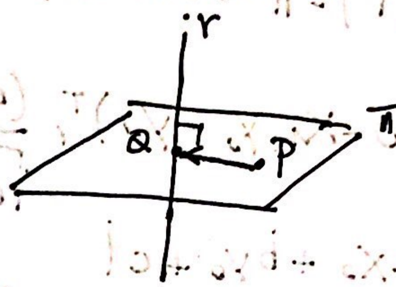


Distanza Punto-retta in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$: Sia $P=(1,0,1)^T$ e sia r la

retta descritta da
$$\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Per determinare $Dist(P,r)$ dobbiamo innanzitutto determinare il piano π passante per P ortogonale alla retta r. Questo piano interseca la retta r in un punto Q. Il punto Q è il punto che realizza la minima distanza.

$$Dist(P,r) = dist(P,Q) = \|P-Q\|$$



Il vettore direttore della retta è:

$v=(1,-1,0)^T$ pertanto il piano π ha equazione

$$x-y=d, \text{ passa per il punto } \underset{\uparrow}{P} \to d=1$$

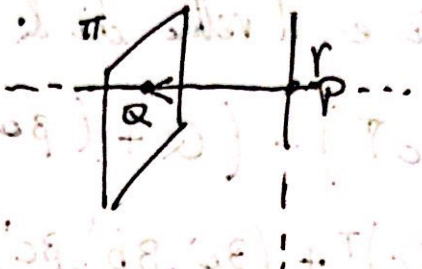
impongo il passaggio

$\pi: x-y=1$. Intersecando la retta r con il piano π otteniamo il punto

$$Q = (1/2, -1/2, 0)^T \to dist(P,r) = \|(P-Q)\| = \|(1/2, 1/2, 1)^T\| = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Distanza tra una retta e un piano ad essa parallela in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

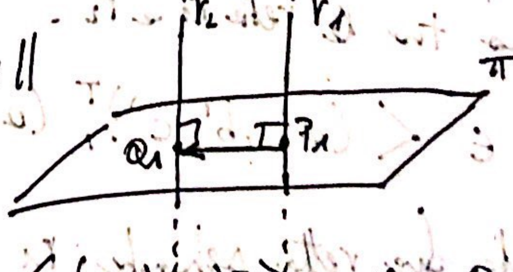
Consideriamo la retta $r: P+\langle v\rangle = (x_0, y_0, z_0)^T + \langle (l,m,n)^T\rangle$ e il piano π di equazione cartesiana $ax+by+cz+d=0$. Il fatto che la retta sia parallela al piano significa che la giacitura di r è contenuta nella giacitura di π cioè che $al+bm+cn=0$. In questo caso tutti i punti della retta hanno la stessa distanza dal piano perciò la distanza tra la retta e il piano si calcola prendendo un qualsiasi punto della retta e determinando la sua distanza dal piano. Si noti che in questo caso i punti di minima distanza cioè i punti $P \in r$ e $Q \in \pi$ che realizzano la minima distanza non sono unici.



Distanza tra due rette nello spazio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

2 Casi: sghembe e non sghembe

Siano r_1 e r_2 due rette NON sghembe. Ai fini della distanza l'unico caso significativo è quello in cui le rette sono parallele e non coincidenti. Allora saranno del tipo: $r_1 = P + \langle (a,b,c)^T \rangle$ e $r_2 = Q + \langle (a,b,c)^T \rangle$ con $P - Q \in \langle (a,b,c)^T \rangle^\perp$. Preso dunque un punto $P_1 \in r_1$, sia π il piano perpendicolare a $(a,b,c)^T$ passante per P_1: chiamiamo Q_1 il punto d'intersezione di π con la retta r_2. La distanza tra le due rette è allora data da $\|P_1 - Q_1\|$



Caso rette sghembe: Siano $r_1: P + \langle (a,b,c)^T \rangle$ e $r_2 = Q + \langle (a',b',c')^T \rangle$ con $P - Q$, $(a,b,c)^T$, $(a',b',c')^T$ vettori linearmente indipendenti e quindi una base di $\mathbb{R}^3$. Decomponiamo il vettore $P - Q$ secondo la somma diretta:

$$\mathbb{R}^3 = \langle (a,b,c)^T, (a',b',c')^T \rangle \oplus \langle (a,b,c)^T, (a',b',c')^T \rangle^\perp$$

Prendiamo la componente di $P-Q$ lungo $\langle (a,b,c)^T, (a',b',c')^T \rangle$: che si scriverà

come $(\alpha a, \alpha b, \alpha c)^T + (\beta a', \beta b', \beta c')^T$ per certi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ne segue che

i punti $P_1 = P - (\alpha a, \alpha b, \alpha c)^T$ e $Q_1 = Q + (\beta a', \beta b', \beta c')^T$

appartengono alle rette r_1 e r_2 e il vettore che li congiunge è

$$P_1 - Q_1 = (P - (\alpha a, \alpha b, \alpha c)^T) - (Q + (\beta a', \beta b', \beta c')^T) =$$

$$= P - Q - \left[(\alpha a, \alpha b, \alpha c)^T + (\beta a', \beta b', \beta c')^T \right]$$ e quindi appartiene

a $\langle (a,b,c)^T, (a',b',c')^T \rangle^\perp$. Se $\tilde{P}$ è un punto di r_1 e $\tilde{Q}$ è

un punto di r_2 allora $\tilde{P} = P_1 + v$ con $v \in \langle (a,b,c)^T \rangle$ e

$\tilde{Q} = Q_1 + w$, con $w \in \langle (a',b',c')^T \rangle$. Ne segue che

$\tilde{P} - \tilde{Q} = (P_1 - Q_1) + (v - w)$ e $v - w$ è ortogonale a $P_1 - Q_1$ pertanto

$\| \tilde{P} - \tilde{Q} \|^2 = \| P_1 - Q_1 \|^2 + \| v - w \|^2 \geq \| P_1 - Q_1 \|^2$. Quindi la distanza

tra un qualsiasi punto di r_1 diverso da P_1 e un qualsiasi punto di r_2 diverso

da Q_1 è maggiore della distanza tra P_1 e Q_1: P_1 e Q_1 sono i punti di

minima distanza tra le rette r_1 e r_2. unici. La loro unicità dipende dal fatto

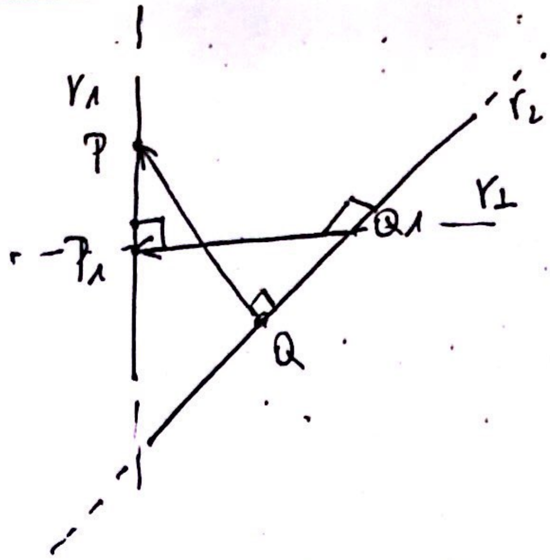
che $P_1 - Q_1 \in \langle (a',b',c')^T, (a,b,c)^T \rangle^\perp$, $\dim \langle (a',b',c')^T, (a,b,c)^T \rangle^\perp = 1$.

Corollario: date due rette sghembe r_1 e r_2 i punti di minima distanza

tra le due rette sono univocamente determinati e sono i punti $P_1 \in r_1$ e $Q_1 \in r_2$

t.c. il vettore $P_1 - Q_1$ sia ortogonale allo spazio direttore generato dalle

giaciture delle due rette (cioè che sia ortogonale ad entrambe).



<u>Esercizio x Casa</u>: In $A^3(\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare usuale:

i) determinare il luogo dei punti aventi distanza 3 dal piano $-2X+Y+Z+5=0$

ii) determinare il luogo dei punti equidistanti dai due punti $A=(1,0,4)^T$ e $B=(3,5,1)^T$

iii) trovare le rette parallele al piano $3X+12Y-4Z-13=0$ aventi distanza 1 da esso e incidenti gli assi Y e Z.

Nella speranza di esservi stato d'aiuto,

in bocca al lupo per l'esame e per la vostra carriera!

Luca Lebon