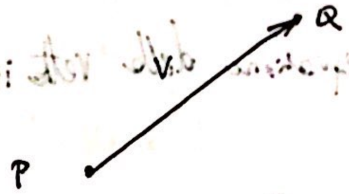
Mart 18/05/2021 — Lezione 11 — Algebra - Paolo Rossi

Spazio Affine 2-dimensionale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

È lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$ dotato della legge
$$X \times V \longrightarrow X$$
$$(P; v) \longmapsto P + v$$

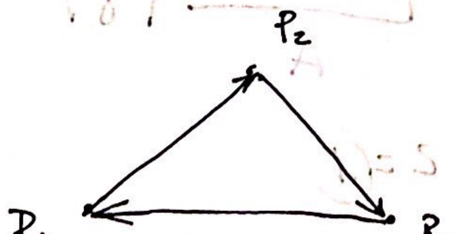
ove X è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$.

Cioè dati un punto $P = (x_1, x_2)^T$ e un vettore $v = (\alpha, \beta)^T$ vogliamo associare ad essi un punto $Q = P + v = (x_1 + \alpha, x_2 + \beta)^T$.



$\longrightarrow$ il vettore v è unico se fisso P e Q. $v = \underset{X}{\overset{}{Q}} - \underset{X}{\overset{}{P}} \in \mathbb{R}^2$.

Prop: In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ siano P_1, P_2, P_3 punti e $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$, $P_3 - P_1$ vettori. Allora il vettore somma $(P_1 - P_2) + (P_2 - P_3) + (P_3 - P_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$ è il vett. nullo



Def: Una sottovarietà lineare L di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è l'insieme $\{P + v \mid v \in \tilde{V}\}$ dove P è un punto fissato di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, $\tilde{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Il sottospazio $\tilde{V}$ si dice Giacitura o Sp. Direttore della sottovarietà L.

$\dim L = \dim \tilde{V}$. Se $\dim L = 1$, L è detta retta.

<u>Esempio di retta in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$</u>: Fissato $P = (1, 4)^T$, $V = \langle (1, -1)^T \rangle$.

I punti di L sono della forma $P + V = (1+\alpha, 4-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Possiamo interpretare $P+V$ come le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo.

Il sistema deve avere due incognite e rango 1 poiché $\dim V = 1$.

$$Ax = b \longrightarrow (a_1 \;\; b_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \quad \text{ossia } A \in M_{1,2}(\mathbb{R}).$$

$$x_2 = -\frac{a_1}{b_1}x_1 + \frac{c_1}{b_1}$$

$(\operatorname{rank} A = 1 = 2 - 1)$ $\longrightarrow$ $\boxed{a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1}$ eq. cartesiana retta in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

<u>Esercizio</u>: Determinare l'equazione della retta in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $P_1 = (1,3)^T$, $P_2 = (3,-1)^T$.

<u>Sol</u>: L'equazione sarà del tipo $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ove α, β, γ devono soddisfare alla richiesta che tale retta contenga i due punti.

$$\begin{array}{l} P_1 \\ \\ P_2 \end{array} \begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 3 + \gamma = 0 \\ \\ \alpha \cdot 3 + \beta(-1) + \gamma = 0 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rk} A = 2 \longrightarrow \dim \operatorname{Ker} A = 3 - 2 = 1$

<u>Sp. delle soluzioni</u>: $\operatorname{Ker} A = \{ (\alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{R}^3 \mid A(\alpha, \beta, \gamma)^T = (0,0)^T \}$

Dalla 1ª: $\alpha = -3\beta - \gamma$, dalla 2ª: $-\gamma = 3\alpha - \beta \longrightarrow \alpha = -3\beta + 3\alpha - \beta$

$2\alpha = 4\beta \longrightarrow \alpha = 2\beta$. Posto $\beta = 1 \longrightarrow \alpha = 2\beta = 2$, $\gamma = \beta - 3\alpha = 1 - 6 = -5$

Pertanto $\operatorname{Ker} A = \langle (2, 1, -5)^T \rangle = \langle (\alpha, \beta, \gamma)^T \rangle$

Pertanto l'eq. della retta è $2x+y-5=0$ - $*$

la sua forma vettoriale è data da $P+V$ ove P è soluzione particolare di $*$ e V e soluzione del sistema lin. omogeneo associato -

Sol part.: $2x+y=5$, se $y=1$, $2x=5-1 \to x=2$

$$P=(2,1)^T$$

Sist omogeneo: $2x+y=0 \to y=-2x \to \langle(1,-2)^T\rangle$

$$P+V = \{(2,1)^T + \langle(1,-2)^T\rangle = \{Q\in X \mid Q=(2+t, 1-2t)^T,\ t\in\mathbb{R}\}$$

Def: Due sottovarietà lineari $L_1 = P+V_1$ e $L_2 = Q+V_2$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si dicono PARALLELE se uno dei due spazi direttori è contenuto nell'altro (se $V_1 \subseteq V_2 \vee V_2 \subseteq V_1$)

Lo spazio Affine tridimensionale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

X insieme di punti di $\mathbb{R}^3$, $V=\mathbb{R}^3$, legge $X \times V \longrightarrow X$

$$(P, V) \longmapsto P+V$$

$$\underset{X}{\underset{\cap}{P}} = (x_1, y_1, z_1)^T,\ \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{V}} = (\alpha, \beta, \gamma)^T,\ \underset{X}{\underset{\cap}{Q}} = P+V = (x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma)^T -$$

La sottovarietà affine lineare L di dimensione 2 di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ è detta PIANO in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

" " " " " " 1 " " " RETTA "

Piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$: In questo caso $\dim L = \dim \tilde{V} = 2$, ossia il piano direttore $\tilde{V}$ ha dim 2 - Vogliamo trovare il sist. che definisce il piano dato da

$$P+\tilde{V} = (x_0, y_0, z_0)^T + \langle (m_1, n_1, t_1)^T, (m_2, n_2, t_2)^T \rangle$$

Vogliamo pertanto che lo sp. delle soluzioni del sist. omogeneo associato abbia dim 2. (4)

$\operatorname{rank} A = 3 - 2 = 1$. Il sistema omogeneo associato deve avere come soluzione $\langle (m_1, n_1, t_1)^T, (m_2, n_2, t_2)^T \rangle$ per cui dovremo cercare a, b, c t.c.:

$$\begin{cases} a m_1 + b n_1 + c t_1 = 0 \\ a m_2 + b n_2 + c t_2 = 0 \end{cases}$$

la soluzione $(a, b, c)^T$ del sistema ottenuto esiste sempre infatti $\langle (a, b, c)^T \rangle = \langle (m_1, n_1, t_1)^T, (m_2, n_2, t_2)^T \rangle^{\perp}$ cioè la terna $(a, b, c)^T$ genera il sottospazio vett. di $\mathbb{R}^3$ ortogonale alla giacitura del piano.

$A \in M_{1,3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \boxed{a x_1 + b x_2 + c x_3 = d}$ equazione cartesiana del piano.

Esercizio: In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ descrivere il piano di equazione $3X - Y = 5$

Sol p.: $\begin{cases} X = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \longrightarrow Y = -5 \longrightarrow P = (0, -5, 0)^T$.

Sol omog.: $3X - Y = 0 \longrightarrow V = \langle (1, 3, 0)^T, (0, 0, 1)^T \rangle$

pertanto $L = P + V = (0, -5, 0)^T + \langle (1, 3, 0)^T, (0, 0, 1)^T \rangle = \{ Q \in X \mid Q = (\alpha, 3\alpha - 5, \beta)^T, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

Esercizio: Scrivere l'eq. cartesiana del piano $(1, 0, 1)^T + \langle (2, 0, -1)^T, (0, 1, 0)^T \rangle$.

Sol: eq. del tipo $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, determinare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in modo che l'insieme delle soluzioni sia $(1, 0, 1)^T + \langle (2, 0, -1)^T, (0, 1, 0)^T \rangle$. Innanzitutto determiniamo $(\alpha, \beta, \gamma)^T$ t.c. $\langle (2, 0, -1)^T, (0, 1, 0)^T \rangle$ sia la soluzione di $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. $(\alpha, \beta, \gamma)^T$ devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 0 + \gamma(-1) = 0 \longrightarrow 2\alpha = \gamma \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0 \longrightarrow \beta = 0 \end{cases} \longrightarrow \langle (1, 0, 2)^T \rangle.$$

Pertanto n' eq. del piano (fascio improprio di piani) è dato da $x+2z+\delta=0$

Impongo il passaggio per $P=(1,0,1)^T \to 1+2+\delta=0 \to \delta=-3$ -

$\to x+2z-3=0$ -

Def: Due sottovarietà lineari $L_1=P_1+V_1$ e $L_2=Q+V_2$ di $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si dicono parallele se uno dei due spazi direttori è contenuto nell'altro - (se $V_1 \subseteq V_2 \lor V_2 \subseteq V_1$) -

Rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$: $\dim L=1$, $L=(x_0,y_0,z_0)^T+\langle(m,n,t)^T\rangle$ ossia la dim dello sp. delle soluzioni del sist. lin. omogeneo associato è pari a $\underline{1}$.

$\dim \operatorname{Ker} A=1 \to \operatorname{rank} A=3-1=2 \to A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d\\d'\end{bmatrix}$

$A\in M_{2,3}(\mathbb{R})$. porge l' equazione cartesiana della retta nello spazio:

$$\begin{cases}ax+by+cz=d\\a'x+b'y+c'z=d'\end{cases}, \text{ con } \operatorname{rn}A=\operatorname{rn}\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\end{pmatrix}=2$$ -

le soluzioni sono una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di dim 1, ossia una retta. La retta si descrive come intersezione di due piani non paralleli -

Retta parallela a un piano: Ciò avviene se la giacitura della retta è contenuta nella giacitura del piano. Ossia il sistema omogeneo $\begin{cases}ax+by+cz=0\\a'x+b'y+c'z=0\end{cases}$ che è il sist. omogeneo che descrive la giacitura della retta che deve avere l'insieme delle soluzioni contenute nell' insieme delle soluzioni del sistema lin. omogeneo associato al piano r $a''x+b''y+c''z=0$

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$ $\longrightarrow$ deve avere rango 2 - Poiché le prime 2 sono lin. indipendenti e la 3° deve essere loro combinazione lineare

Esercizio: Intersezione retta - piano in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}, \quad \text{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2,$$

$\pi: a''x+b''y+c''z=d''$

Sol: il sist. intersezione è $$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

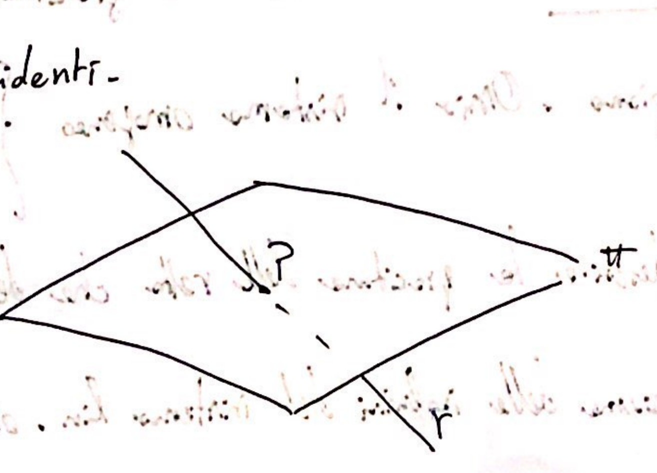
$$\overbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{bmatrix}, \text{ con } \text{rn}A \geq 2.$$

2 possibilità

1) $\text{rn}A=2$ $\quad r \parallel \pi$, retta $\subseteq$ piano

2) $\text{rn}A=3$ in questo caso l'equazione del piano è indip. dall'eq. della retta. Il sistema ha pertanto soluzione unica di dimensione $3-3=0$ ossia il punto P di intersezione tra r e π.

Diremo che r e π sono incidenti.



Esercizio : Posizione reciproca di due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$$

Sol : Studio l'intersezione dei sistemi

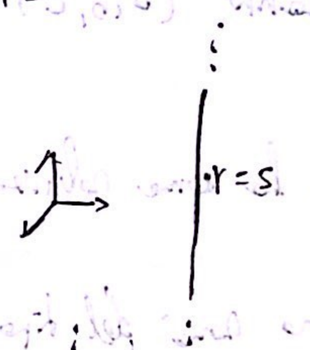
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{pmatrix} , \ \text{rank}\, A \geq 2$$

$\longrightarrow \boxed{Ax = d}$

3 possibilità:

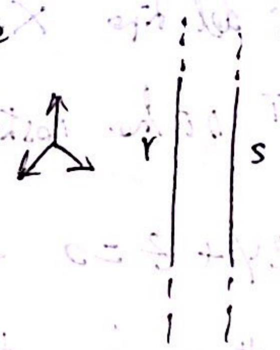
1) $\text{rk}\, A = 2$ s è lin. dip da r $\rightarrow$ spazi di giacitura uguali, $r \parallel s$

Per Rouché Capelli se $\text{rk}\, A = \text{rk}(A|d) = 2 \rightarrow \exists$ soluzione
le rette coincidono

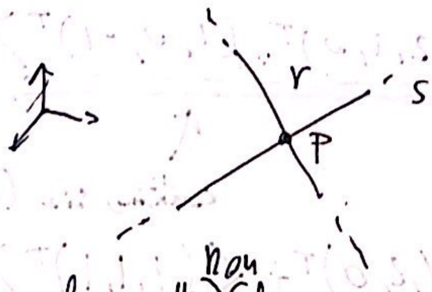


se $\text{rk}\, A = 2 \neq \text{rk}(A|d) = 3 \rightarrow \nexists$ soluzione

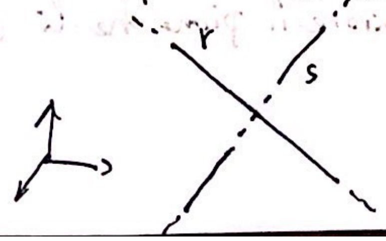
ossia le rette sono parallele e non si incontrano, no sol nel sistema intersezione.



2) $\text{rk}\, A = 3$, se $\text{rk}\, A = \text{rk}(A|d) = 3$ $\exists!$ soluzione, il punto intersezione tra le rette



3) $\text{rk}(A|d) = 4 \longrightarrow$ le rette non hanno punti in comune (no sol) ma non sono parallele $\longrightarrow$ SGHEMBE



Esercizio: Determinare un piano che contenga $r:(1,1,1)^T+\langle(2,1,0)^T\rangle$ e che sia $\parallel$ alla direzione data da $V=(1,0,-1)^T$.

Sol: $\pi : P+\langle V_1, V_2\rangle$. Il piano π passa per $(1,1,1)^T$ dovendo contenere r; inoltre la sua giacitura deve contenere la giacitura di r ~~stessa~~ e direzione $(1,0,-1)^T$.

$$\pi : (1,1,1)^T+\langle(2,1,0)^T, (1,0,-1)^T\rangle.$$

Calcoliamone l'eq. cartesiana $ax+by+cz+d=0$ in cui la parte omogenea

$ax+by+cz=0$ abbia come insieme delle soluzioni lo spazio $\langle(2,1,0)^T,(1,0,-1)^T\rangle$

Pertanto $(a,b,c)^T$ devono soddisfare $\begin{cases} a2+b1+c0=0 \\ a1+b0+c(-1)=0 \end{cases}$

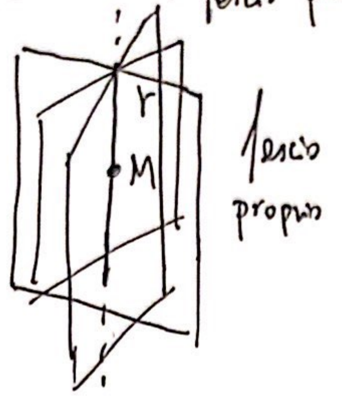
che ha come soluzione lo spazio $\langle(1,-2,1)^T\rangle$. Pertanto l'eq. del fascio improprio del piano sarà del tipo $x-2y+z+d=0$. Poiché deve contenere il punto $(1,1,1)^T$ si ha sostituendo $1-2+1+d=0 \rightarrow d=0$

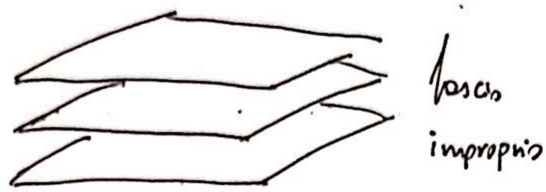
$\pi : x-2y+z=0$. Il piano dunque passa per l'origine $(0,0,0)^T$ e può essere descritto semplicemente mediante $\langle(2,1,0)^T,(1,0,-1)^T\rangle$ intendendo con esso la sottovarietà lineare $(0,0,0)^T+\underline{\underline{\langle(2,1,0)^T,(1,0,-1)^T\rangle}}$.

contiene sia $(0,0,0)^T$, sia $(1,1,1)^T$.

Esercizio: Siano dati la retta $r=(1,2,0)^T+\langle(1,1,1)^T\rangle$ e il punto $M=(0,-1,-1)^T$. Determinare il piano che li contenga.

Sol: Se il punto appartiene alla retta allora non vi sarebbe un solo piano contenente la retta e il punto ma un fascio proprio di piani.





Affinché $M \in r$ deve $\exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $M = P + V$

$$(0,-1,-1)^T \overset{!}{=} (1,2,0)^T + t(1,1,1)^T$$

$$\overset{!}{=} (1+t, 2+t, t)^T, \; t \in \mathbb{R}$$

Questo non avviene per nessun $t \in \mathbb{R}$.

Allora il piano cercato deve contenere i punti $(0,-1,-1)^T$ e $(1,2,0)^T$ e la sua giacitura deve contenere $(1,1,1)^T$. Ora la giacitura deve anche contenere un vettore che sommato a $(1,2,0)^T$ dia $(0,-1,-1)^T$ cioè il vettore $w = P - M = (1,2,0)^T - (0,-1,-1)^T = (1,3,1)^T$. Tale vettore è lin. indip. da $(1,1,1)^T$ e deve stare nella giacitura del piano. Pertanto il piano è dato da $\pi : (1,2,0)^T + \langle (1,3,1)^T, (1,1,1)^T \rangle$.