Def: Il prodotto scalare (interno) usuale o euclideo in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) è la mappa

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}).$$

$$(x, y) \longmapsto x^T \underbrace{I_2}_{\text{tensore metrico}} y = x^T y = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i .$$

Def: Definiamo il prodotto scalare usuale o euclideo su $\mathbb{R}^n$ come

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = x^T y = x^T I_n y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

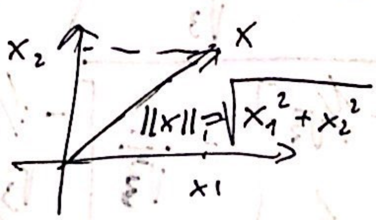
$$x \cdot y$$

Proprietà:

1) Simmetrica $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2) Bilineare
   - $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
   - $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
   - $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Def: Sia $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dato $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ detta norma (euclidea) di x.

Se $\|x\|_2 = 1$, x è detto versore.



Teorema: Disuguaglianza di Cauchy-Swartz

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ vale: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

Prop: Disuguaglianza triangolare

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ vale $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

Def: Si definisce misura del coseno dell'angolo θ_{vw} tra due vettori non nulli $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$\cos\theta_{vw} \equiv \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|_2 \|w\|_2} = \frac{\langle v, w\rangle}{\sqrt{\langle v, v\rangle \langle w, w\rangle}}$$

Def: Dato $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, un vettore v si dice ORTOGONALE ad un vettore w sse $\langle v, w\rangle = 0$.

Es: Dato $\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ trovare un vettore di $\mathbb{R}^2$ ortogonale a $\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$.

Il vettore da trovare $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ deve soddisfare

$$\left\langle x, \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{ovvio} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

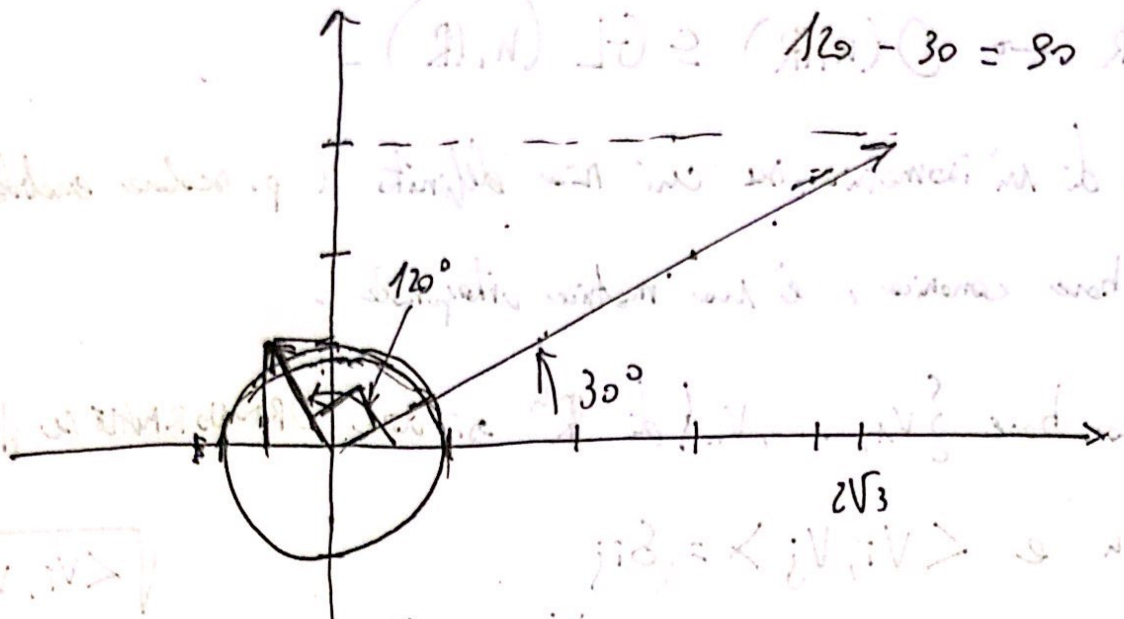
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 2\sqrt{3} + 2x_2 = 0$$

sse $\boxed{x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_2}$, ad esempio $x_2 = 1$ $\quad \cos^2 120 + \sin^2 120 = 1$

versore

$$x = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \cos 120° \\ \sin 120° \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix}$$



<u>Def</u> : Un endomorfismo φ di $\mathbb{R}^n$ che rispetta il prodotto scalare cioè

$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si dice ISOMETRIA

Un'isometria mantiene il prodotto scalare, e quindi la norma.

Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ è la matrice associata a $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ rispetto alla base canonica, allora presi: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\varphi(x) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; \varphi(y) = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. $\qquad (\theta y)^T = y^T \theta^T$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \left(A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)^T I_3 A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = (x_1 \, x_2 \, x_3) A^T I_3 A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\langle x, y \rangle = (x_1 \, x_2 \, x_3) I_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deve valere $\underline{A^T I_3} A = I_3$

$$A^T I_3 = A^T \rightarrow A^T A = I_3 \rightarrow \boxed{A^T = A^{-1}}$$

Def: Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice ORTOGONALE se $A^T = A^{-1}$.

Chiamiamo Gruppo Ortogonale $O(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici ortogonali $n \times n$ su $\mathbb{R}$ $\rightarrow O(n,\mathbb{R}) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$.

La matrice di un'isometria su cui sia definito il p. scalare euclideo, risp. alla base canonica, è una matrice ortogonale.

Def: Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice ORTONORMALE se $\|v_i\|_2 = 1$

$\sqrt{\langle v_i, v_i \rangle}$

$\forall i = 1, \dots, n$ e $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

$\rightarrow$ esempio: la base canonica è una base ortonormale.

Allora una isometria manda basi ortonormali in basi ortonormali.

Normalizzazione di Gram-Schmidt:

Serve a costruire una base ortonormale di ogni sottospazio di uno spazio vett. munito di p. scalare, a partire da una sua base qualunque. Dati $T \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\{v_1, \dots, v_m\}$ una sua base costruire una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_m\}$ tc $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle u_1, \dots, u_m \rangle = T$.

$$U_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$$

$$U_2' = V_2 - \langle U_1, V_2 \rangle U_1$$

$$U_2 = \frac{U_2'}{\|U_2'\|}$$

$$U_3' = V_3 - \langle U_1, V_3 \rangle U_1 - \langle U_2, V_3 \rangle U_2$$

$$U_3 = \frac{U_3'}{\|U_3'\|}$$

$\vdots$

$$U_m' = V_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle U_i, V_m \rangle U_i$$

$$U_m = \frac{U_m'}{\|U_m'\|}$$

Def : Sia T un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Si dice sottospazio ortogonale di T, $T^\perp$ l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali ad ogni vettore di T.

$$T^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, t \rangle = 0 \ \forall t \in T \}$$

Proprietà : • Se $S \subseteq T$ allora $T^\perp \subseteq S^\perp$

• $T \cap T^\perp = \{ 0_{\mathbb{R}^n} \}$

Prop : Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim T = m$, allora $\dim T^\perp = n - m$ e allora

$$\mathbb{R}^n = T \oplus T^\perp \quad (n \text{ finito})$$

Ossia in $\mathbb{R}^n$ fissato T di dimensione m si ha

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{v}} = v_{\parallel} + v_{\perp} \quad \text{ove } v_{\parallel} \in T,\ v_{\perp} \in T^{\perp}.$$

$v_{\parallel}$ e $v_{\perp}$ sono dette PROIEZIONI ORTOGONALI del vettore v su T e su $T^{\perp}$.

In particolare la funzione $\mathbb{R}^n \longrightarrow T$

$v \longmapsto v_{\parallel}$ è detta proiezione ortogonale su T.

Esercizio: In $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ siano dati i vettori linearmente indipendenti

$v_1 = (1, 2, 0, -1)^T$, $v_2 = (0, 2, 1, 1)^T$, $v_3 = (1, -1, 1, 1)^T$.

Determinare una base ortonormale w_1, w_2, w_3 di $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Determinare $V^{\perp}$ e descrivere la proiezione ortogonale di $(1, 2, 0, 0)^T$ su V.

Sol: Applichiamo Gram-Schmidt: normalizzo v_1:

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{1 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0, -1/\sqrt{6}\right)^T$$

$$w_2' = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$2\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$\|W_2'\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1 + 1 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$W_2 = \frac{W_2'}{\|W_2'\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(-\tfrac{1}{2}, 1, 1, \tfrac{3}{2}\right)^T$$

$$\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3} \cdot 3} \qquad \cancel{3} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}\,\cancel{\sqrt{3}}} =$$

$$W_3' = V_3 - \langle W_1, V_3 \rangle W_1 - \langle W_2, V_3 \rangle W_2 =$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\0\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\0\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1/2\\1\\1\\3/2\end{bmatrix} \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix}-1/2\\1\\1\\3/2\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\0\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1/2\\1\\1\\3/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\0\\-1/3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\2/3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}$$

$$\|W_3'\| = \sqrt{1 + 3\,\frac{1}{3^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$W_3 = \frac{W_3'}{\|W_3'\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^T \longrightarrow \{W_1, W_2, W_3\}$$ base ortonormale di V.

Per trovare $V^\perp$ occorre determinare il vettore $(x, y, z, t)^T$ che sia ortogonale ai vettori di una base di V. $(\dim V = 3 \longrightarrow \dim V^\perp = 4 - 3 = 1)$

$$\left\langle \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix}}_{V_1} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix}}_{V_2} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}_{V_3} \right\rangle = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ 2y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

: sistema di rango 3 (i coeff. delle righe della matrice associata al sistema sono le coordinate dei vettori V_1, V_2, V_3 che sono linearmente indipendenti). Pertanto lo spazio delle soluzioni ha dimensione $4 - 3 = 1$. Risolvendo tale sistema omogeneo si ottiene

$V^\perp = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \langle (1, 1, -5, 3)^T \rangle$.

Pertanto $\mathbb{R}^4 = V \oplus V^\perp = V \oplus \langle (1,1,-5,3)^T \rangle$.

$\|(1,1,-5,3)^T\| = \sqrt{1+1+25+9} = 6$. Determiniamo ora la proiezione ortogonale di $(1,2,0,0)^T$ su V:

Sia $v = (1,2,0,0)^T = v_\parallel + v_\perp$, $v_\parallel \in V$, $v_\perp \in V^\perp$.

Dobbiamo calcolare la proiezione $v_\parallel$ su V: conviene calcolare la sua componente lungo $V^\perp$, cioè

$$v_\perp = \langle v, \underbrace{\frac{(1,1,-5,3)^T}{\|(1,1,-5,3)^T\|}}_{\text{versore di } V^\perp} \rangle \frac{(1,1,-5,3)^T}{\|(1,1,-5,3)^T\|}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -5/6 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -5/6 \\ 1/2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/12 \\ -5/12 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

componente di $(1,2,0,0)^T$ ortogonale a V (ovvero $\parallel$ a $V^\perp$).

Allora $v_\parallel = v - v_\perp = (1,2,0,0)^T - (1/12, 1/12, -5/12, 1/4)^T$

$\overset{!}{=} (11/12, 23/12, 5/12, -1/4)^T$ —

Esercizio: Determinare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v_1 = (-1, 1, -1)^T$, $v_2 = (2, 1, 4)^T$, $v_3 = (4, -1, 6)^T$.

Sol: Ci chiediamo se v_1 e v_2, v_3 sono lin. indipendenti.

$$\det\begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T & v_3^T \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} = -1\cdot(6+4) - 2(6-1) + 4(4+1) = -10-10+20 = 0.$$

Dunque una base di W è data dai vettori v_1 e v_2 - I vettori v_1 e v_2 non sono ortogonali $\langle (-1,1,-1)^T, (2,1,4)^T \rangle = -2+1-4 = -5 \neq 0$

Proc. di Ortogonalizzazione di Gram.-Schmidt:

$\|v_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$w_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T$

$w_2' = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = (2,1,4)^T - \langle (2,1,4)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T \rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T =$

$= (2,1,4)^T - \frac{1}{3}\langle (2,1,4)^T, (-1,1,-1)^T \rangle (-1,1,-1)^T =$

$= (2,1,4)^T - \frac{1}{3}(-2+1-4)(-1,1,-1)^T = (2,1,4)^T + \frac{5}{3}(-1,1,-1)^T =$

$= (1/3, 8/3, 7/3)^T$

$\|w_2'\| = \sqrt{\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{8^2}{3^2} + \dfrac{7^2}{3^2}} = \dfrac{\sqrt{114}}{3} \longrightarrow w_2 = \dfrac{w_2'}{\|w_2'\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{114}}, \dfrac{8}{\sqrt{114}}, \dfrac{7}{\sqrt{114}}\right)^T.$

$\{w_1, w_2\}$ è una base ortonormale di W.