Lezione n° 8 Algebra Paolo Rossi 27/04/2021 ①

Sia $A = \mathbb{R}^m$, $B = \mathbb{R}^n$ e $f : A \longrightarrow B$, $x \longmapsto f(x)$ un'applicazione

lineare tra spazi vettoriali (tale applicazione è individuata dalla matrice $n \times m$ associata alla trasformazione -)

Teorema (delle dimensioni): $f : A \to B$

$\dim A = m = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ dove

$\operatorname{Im} f = \{ y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ per cui } f(x) = y \}$

$\operatorname{Ker} f = \{ x \in A \mid f(x) = \underline{0} \in B \}$

- f è INIETTIVA sse $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\} \longrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$

e poiché $\operatorname{Im} f \subseteq B$ (al max $\operatorname{Im} f \equiv B$) si ha

$m = \dim A = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim B = n$

$\longrightarrow$ $\boxed{f \text{ è INIETTIVA sse } n \geq m}$ $\leftarrow$ lo capisco dalla matrice ridotta a gradini

- f è SURIETTIVA sse $\operatorname{Im} f = B \longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim B = n$, pertanto

$m = \dim A = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f + n$

$\longrightarrow$ $\boxed{f \text{ è SURIETTIVA sse } m \geq n}$

- f è BIIETTIVA se $\dim A = \dim B \longleftrightarrow m = n$

Poiché f è lineare e biiettiva è detta ISOMORFISMO di spazi vettoriali (di A in B)

Inoltre se $A = B$ $(= \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è detta ENDOMORFISMO $\left(f \in End(A) \right)$ $\left(End(A) = Lin(A, A) \right)$

Esercizio 1 : Data un'applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ e dato un vettore $w \in W$, in che modo possiamo descrivere $L^{-1}(\{w\})$, ossia l'insieme di tutti i vettori di V che sono mandati da L in W?

$\ulcorner A : Av = w \lrcorner$

Sol: Se $w = \underline{0} \in W$ allora

$L^{-1}(\{w\}) = Ker\,L$, se $w \neq \underline{0}$? Se $w \notin Im\,L$ allora $L^{-1}(\{w\}) = \emptyset$. Se invece $w \in Im\,L$ $\exists$ sicuramente un elemento $v \in V \mid L(v) = w$ pertanto $L^{-1}(\{w\}) = Ker\,L + v$.

Esercizio 2 : Stabilire quali delle seguenti applicazioni sono lineari

i) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + 3$ - (retta non passante x l'origine)

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y) = (x^2, y)$

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x, y) = 2x + 3y$

iv) $f_4 : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f_4\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + c, b + d)$

v) $f_5 : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $f_5(A) = 2A$
$\quad\;\; \overset{\cup\!\shortmid}{A}$

Sol: i) L'immagine mediante un'applicazione lineare del vettore nullo del dominio è sempre il vettore nullo del codominio, ma $f_1(0) = 3 \neq 0$, quindi f_1 NON è un'applicazione lineare.

ii) L'applicazione f_2 NON è lineare dal momento che

$$f_2\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right) = f_2\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \neq$$

$$f_2\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + f_2\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

iii) Per verificare che $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è lineare occorre verificare che

1) $\forall v, w \in \mathbb{R}^2 : f(v+w) = f(v) + f(w)$ ADDITIVITÀ

2) $\forall v \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha v) = \alpha f(v)$ OMOGENEITÀ

Consideriamo dunque l'applicazione f_3 e siano $v = (a, b)^T$, $w = (c, d)^T$ due elementi di $\mathbb{R}^2$.

$$f_3(v+w) = f_3(a+c, b+d)^T = 2(a+c) + 3(b+d) = (2a+3b) + (2c+3d)$$
$$\overset{!}{=} f_3(v) + f_3(w) \text{ ok!}$$

Preso $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_3(\alpha v) = f_3(\alpha a, \alpha b)^T = 2\alpha a + 3\alpha b = \alpha(2a+3b) = \alpha f_3(v) \text{ ok!}$$

$$\longrightarrow f_3 \in Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

iv) Analogamente a iii) $f_4 \in Lin(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$

v) " " iii) $f_5 \in Lin(M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})) = End(M_n(\mathbb{R}))$

Esercizio 3: Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$f(x,y,z) = (x+y, x+y, z)$

i) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio.

ii) Determinare $Ker f$ e $Im f$.

iii) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $B = \{v_1 = (1,1,1)^T, v_2 = (1,1,0)^T, v_3 = (1,-1,0)^T\}$.

iv) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

Sol i) La matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio è la matrice che sulle colonne le coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ delle immagini mediante f dei vettori della stessa base.

$f(1,0,0)^T = (1,1,0)^T = 1(1,0,0)^T + 1(0,1,0)^T + 0(0,0,1)^T$

$f(0,1,0)^T = (1,1,0)^T = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$

$f(0,0,1)^T = (0,0,1)^T = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3$

Dunque la matrice associata ad f rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio è
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Sappiamo che $\mathrm{Im}\, f$ è generato dai vettori $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, e poiché $f(1,0,0)^T = f(0,1,0)^T \to \mathrm{Im}\, f = \langle (1,1,0)^T, (0,0,1)^T \rangle$

$\dim \mathrm{Dom} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$

$\to \dim \mathrm{Ker}\, f = 3-2 = 1$

Del resto, dal momento che $f(e_1) = (1,1,0)^T = f(e_2)$, per la <u>linearità</u> di f il vettore $(1,0,0)^T - (0,1,0)^T = (1,-1,0)^T$ ha come immagine il vettore nullo:

$f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = \underline{0} \in \mathbb{R}^3$ dunque

$\mathrm{Ker}\, f = \langle (1,-1,0)^T \rangle$ (infatti $(\alpha-\alpha, \alpha-\alpha, 0)^T = (0,0,0)^T$).

iii) La matrice richiesta ha nelle colonne le coordinate della base $\{v_1, v_2, v_3\}$ delle immagini dei vettori della base canonica. Abbiamo già determinato, tramite f, le immagini dei vettori della base canonica. Si tratta ora di esprimere queste immagini in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$f(e_1) = (1,1,0)^T = 0V_1 + 1 \cdot V_2 + 0V_3$

$f(e_2) = (1,1,0)^T = 0V_1 + 1V_2 + 0V_3$

$f(e_3) = (0,0,1)^T = 1V_1 - 1V_2 + 0V_3$

$(0,0,1)^T = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = (\alpha,\alpha,\alpha)^T + (\beta,\beta,0)^T + (\gamma,-\gamma,0)^T =$

$= (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta-\gamma, \alpha)^T$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta-\gamma = 0 \\ \boxed{\alpha = 1} \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -\gamma-\alpha \\ \beta = \gamma-\alpha \end{cases} \rightarrow -\gamma-\cancel{\alpha} = \gamma-\cancel{\alpha} \quad 2\gamma = 0 \rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

$$\rightarrow \boxed{\beta = \gamma-\alpha = -\alpha = -1}$$

$$\rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)^T = (1,-1,0)^T$$

La matrice richiesta è dunque $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

iv) In questo caso la base fissata nel dominio è la base $\{V_1, V_2, V_3\}$.

Calcoliamo allora le immagini dei vettori V_1, V_2, V_3 e determiniamo le coordinate dei vettori trovati rispetto alla base canonica:

$f(V_1) = (2,2,1)^T = 2e_1 + 2e_2 + 1e_3$

$f(V_2) = (2,2,0)^T = 2e_1 + 2e_2 + 0 \cdot e_3$

$f(V_3) = (0,0,0)^T$

La matrice richiesta è dunque $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 4: Tra le applicazioni lineari dell'esercizio 2 si determinino quelle iniettive e quelle suriettive.

Sol: Le funzioni f_1 e f_2 NON sono lineari.

La mappa $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x,y) = 2x+3y$ NON è iniettiva:

$f_3(-3,2)^T = 0$, dunque $(-3,2)^T$ è un vettore non nullo nel nucleo di f_3. D'altra parte dal Teorema delle dimensioni si può concludere che:

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \operatorname{Ker} f_3 + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f_3}_{\text{al max}=1}$$

$$\longrightarrow \dim \operatorname{Ker} f_3 = 2 - \dim \operatorname{Im} f_3 \geq 1$$ quindi non esistono funzioni lineari da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ iniettive. La matrice di f_3 è $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$: è a gradini.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m} = \mathbb{R}^{1\times 2}$, poiché $m > n$. f_3 NON può essere iniettiva.

Nel nostro caso f_3 è però suriettiva $(m>n)$, infatti $\operatorname{Im} f_3$ contiene il vettore $f_3(1,0)^T = 2$ dunque ha dimensione > 0. Del resto $\dim \mathbb{R} = 1$, $\operatorname{Im} f_3 = \mathbb{R}$.

Nello stesso modo $f_4 : M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4 \xrightarrow{*} \mathbb{R}^2$, $f_4\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+c, b+d)^T$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\overset{2\times 2}{\downarrow}4} \longrightarrow \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} = f_4 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{a gradini}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m} = \mathbb{R}^{2\times 4} \longrightarrow n<m$

f_4 è suriettiva ma non iniettiva.

La mappa $f_5 : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$$A \longmapsto f_5(A) = 2A$$

$f_5 \in \mathrm{End}(M_n(\mathbb{R}))$ pertanto poiché è un endomorfismo è iniettiva se è suriettiva. Del resto f_5 è ovviamente suriettiva

(poiché $2A \in M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Im}\, f_5 = M_n(\mathbb{R})$) e quindi biiettiva.

$\longrightarrow f_5$ è isomorfismo di $M_n(\mathbb{R})$ in se stesso (AUTOMORFISMO).

<u>Esercizio 5</u>: Sia $D : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ ($\dim \mathbb{R}^{\leq 3}[x] = 4$) l'applicazione derivata (rispetto alla variabile x). Determinare $\mathrm{Ker}\, D$, $\mathrm{Im}\, D$ e la matrice associata a D rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

<u>Sol</u>: Ricordiamo la definizione di derivata di un polinomio di una variabile (di grado ≤ 3):

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

Si verifica immediatamente utilizzando questa definizione che la derivata è un'applicazione lineare (FATELO)

- $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}(\alpha f(x)) = \alpha \frac{d}{dx} f(x)$ -

Per definizione di nucleo di un'applicazione lineare:

$$\mathrm{Ker}\, D = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid D(p(x)) = 0\}$$
$$= \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = 0\}$$

$$\mathrm{Ker}\, D = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_1 = a_2 = a_3 = 0\}$$
$$= \{p(x) = a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$ (la derivata di una qualsiasi costante è $= 0$)

$\rightarrow$ $\dim \mathrm{Ker}\, D = 1$. Usando il Teorema delle dimensioni si deduce immediatamente che l'Immagine di D ha dimensione

$$\dim \mathrm{Im}\, D = \dim \mathbb{R}^{\leq 3}[x] - \dim \mathrm{Ker}\, D = 4 - 1 = 3$$

$$\mathrm{Im}\, D \underset{\uparrow}{=} \langle D(1), D(x), D(x^2), D(x^3) \rangle = \langle 0, 1, 2x, 3x^2 \rangle$$
$$= \langle 1, 2x, 3x^2 \rangle$$

immagine dei vettori della base (se lin. indip.) sono una base dello spazio immagine

La matrice associata a D rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -