Lezione n° 7 Algebra (Paolo Rosti) 20/04/2021 1

Esercizio 1: Calcolare i prodotti AB e BA delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Indicato con $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ sia la matrice AB, determinare $f(2,-3)^T$.

La matrice BA è la matrice di un endomorfismo?

Sol: Prodotto righe x colonne:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 0 + 2(-2) + 3(-1) + 4\cdot 3 & 3+20 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 23 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -4+1 & -6-3 & -8+2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 6+5 & 3-15 & 12+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & -9 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 11 & -6 & 22 \end{bmatrix}$$

AB è una matrice quadrata di ordine 2, quindi è associata a un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$. BA è una matrice quadrata di ordine 4, quindi è associata ad un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$. Dire che AB è la matrice associata ad un endomorfismo f rispetto alla <u>base canonica</u> significa che le colonne di AB sono le coordinate rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ dei vettori

$f(e_1)$, $f(e_2)$ - Quindi:

$$f(e_1) = AB\, e_1 = \begin{pmatrix} 5 & 23 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = (23, 11)^T$$

Sfruttando la linearità di f calcoliamo l'immagine del vettore $(2, -3)^T$:

$$f(2,-3)^T = f(2e_1 - 3e_2) = 2f(e_1) - 3f(e_2) =$$

$$= \underbrace{2(5,7)^T - 3(23,11)^T}_{\text{combinazione lineare della base di } Im\, f} = (-59, -19)^T = AB\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2: Determinare la matrice inversa di ciascuna delle seguenti matrici:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

matrice aggiunta $Adj(M_1) = Cof^T(M_1)$ matrice dei cofattori

Sol: M_1^{-1}:

1° metodo: $$M_1^{-1} = \frac{1}{\det(M_1)}\left(Adj(M_1)\right) = \frac{(Cof\, M_1)^T}{\det M_1}$$

$$\det M_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot1 - (-2)1 = 3 \neq 0 \quad \exists M_1^{-1}$$

$$Cof(M_1) = \begin{bmatrix} Cof_{11}(M_1) & Cof_{12}(M_1) \\ Cof_{21}(M_1) & Cof_{22}(M_1) \end{bmatrix}$$

minore di M_1 cancellando la riga i e la colonna j di M_1

Complemento algebrico $$Cof_{ij}(M_1) = (-1)^{i+j}\det(M_{1\,ij})$$

$\mathrm{Cof}_{11}(M_1) = 1 \cdot 1 = 1$, $\mathrm{Cof}_{12}(M_1) = -1 \cdot (-2) = 2$

$\mathrm{Cof}_{21}(M_1) = -1 \cdot 1 = -1$, $\mathrm{Cof}_{22}(M_1) = 1$

$$M_1^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(M_1)}{\det M_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

<u>2° metodo</u>: $M^{-1} \mid M M^{-1} = Id$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_2(1/3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{1,2}(-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

M_2^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[H_{2,3}(-2)]{H_1(2),\ H_1(-1),\ \cancel{H_1(2)},\ H_{1,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_1(1/2),\ H_2(-1),\ H_3(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

Osserviamo che M_2 è triangolare superiore $\longrightarrow$ M_2^{-1} è triangolare superiore

M_3^{-1}: matrice diagonale

$$M_3 M_3^{-1} = I_{3\times 3} \longrightarrow M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 : Sia $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata, risp. alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Determinare $H^{-1}_{2,3}$, $h^{-1}(2,1,2)^T$

Sol :

$$Adj_{ij} = Cof_{ji} \longrightarrow (Cof_{ij})^T = Cof_{ji}$$

$$H^{-1}_{2,3} = \frac{Adj_{23}(H)}{\det H} = \frac{Cof_{32}(H)}{\det H}$$

$$\det H = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + (-1)(-1)^{2+1} \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + 0$$

$$= -3 - 2 + (-6) = -11 \neq 0$$

$$Cof_{32}(H) = (-1)^{3+2} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -1(-2) = 2$$

$$H^{-1}_{2,3} = \frac{1}{-11}(2) = -2/11$$

$$H^{-1}: \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_{3,2}(1)]{H_3(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[H_{2,3}(-1),\, H_3(1/2)]{H_2(11),\, H_3(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 & 9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -11 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_{1,2}(-1)]{H_1(33/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 33/2 & 0 & 0 & 15/2 & -9 & 6 \\ 0 & 33 & 0 & 9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -11 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$H_1\left(\tfrac{2}{33}\right),\ H_2\left(\tfrac{1}{33}\right),\ H_3\left(-\tfrac{1}{11}\right) \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/11 & -6/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 3/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 1 & -1/11 & -1/11 & -3/11 \end{array}\right]$$

$H^{-1}_{2,3}$

$$h^{-1}(2,1,2)^T = H^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/11 & -6/11 & 4/11 \\ 3/11 & 3/11 & -2/11 \\ -1/11 & -1/11 & -3/11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/11 \\ 5/11 \\ -9/11 \end{bmatrix}$$

Soluzione particolare del sistema lineare $Hx = b \to x = H^{-1}b$

$\operatorname{Ker} H = \{\underline{0}\}$ (unica soluzione).

<u>Esercizio 4</u>: Sia $id : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione identica. Si consideri la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \{w_1 = (1,1,0)^T, w_2 = (1,-1,0)^T, w_3 = (0,1,1)^T\}$

Si scriva la matrice associata all'applicazione id usando:

1) La base $\mathcal{B}$ nel dominio e la base canonica nel codominio

2) La base canonica nel dominio e la base $\mathcal{B}$ nel codominio

3) La base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio.

$C \to C$

$I_{3\times3}$

<u>Sol</u>: L'applicazione id manda ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ in se stesso $id(v) = I_{3\times3}v = v$ $\forall v \in \mathbb{R}^3$

1) Nel caso 1) si ha $id(w_i) = w_i$ $\forall i = 1,2,3$ e poiché le coordinate

di un vettore rispetto alla base canonica non sono che le sue componenti si ha ⑥
che la matrice associata all'applicazione id rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio è:

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 & W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

infatti
$$\underset{\mathcal{B} \longrightarrow \cancel{A}C}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{W_1 \text{ in } \mathcal{B}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{W_1 \text{ in } \{e_1, e_2, e_3\}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

2) Nel caso 2) abbiamo $id(e_i) = e_i$ $\forall e_i$ vett. della base canonica e dobbiamo esprimere i vettori e_i in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Potremmo procedere direttamente determinando $\forall i = 1,2,3$ i numeri reali $\alpha, \beta, \gamma \mid e_1 = \underline{\alpha} W_1 + \underline{\beta} W_2 + \underline{\gamma} W_3$ e così via
Tuttavia osserviamo che la matrice che ha sulle colonne le componenti dei vettori e_i rispetto ai vettori W_j è la matrice di cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ pertanto essa è la matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{2,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[H_{2,1}(1)]{H_1(1/2),\, H_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad C \longrightarrow B$$

infatti
$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e_1 scritto nella base B

infatti:
$$e_1 = (1,0,0)^T = \alpha \underbrace{(1,1,0)^T}_{w_1} + \beta \underbrace{(1,-1,0)^T}_{w_2} + \gamma \underbrace{(0,0,1)^T}_{w_3}$$
$$= (\alpha+\beta, \alpha-\beta, \gamma)^T$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha - \beta \\ 0 = \gamma \end{cases} \longrightarrow (\alpha, \beta, \gamma)^T = e_1 = (1/2, 1/2, 0)^T$$

scritto come comb. lineare della base B

3) Nel caso 3) abbiamo banalmente

$$id(w_1) = 1\,w_1 + 0\,w_2 + 0\,w_3$$
$$id(w_2) = 0\,w_1 + 1\,w_2 + 0\,w_3$$
$$id(w_3) = 0\,w_1 + 0\,w_2 + 1\,w_3$$

$$\longrightarrow \underset{B \to B_3}{I_{3\times 3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$