Les. n° 6 Algebra ~~Prof~~ Paolo Rossi 13/04/2021

Esercizio 1 : Risoluzione di un sistema lineare parametrico

Consideriamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema nelle incognite x, y, z

$$S_\alpha = \begin{cases} \alpha x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - \alpha z = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \qquad \underline{X} = (x, y, z)^T$$

Sol : Matrice incompleta dei coefficienti

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -\alpha \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$, il problema consiste nel determinare la

controimmagine del vettore $b = (1, 2, 3)^T$ del sistema lineare $A_\alpha \underline{X} = b$

A seconda del valore di α il vettore b starà nell'immagine di

$$f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$ o meno.

Consideriamo la Matrice Completa, ricordando che $\alpha \in \mathbb{R}$, effettuiamo delle trasformazioni per riga (che sappiamo non alterano le soluzioni del sistema).

$$(A_\alpha | b) = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -\alpha & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha & 2 \\ \alpha & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{3,1}(-3)}$$

$$\xrightarrow{H_{3,1}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha & 2 \\ \alpha & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3\alpha & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{2,1}(-\alpha)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 2\alpha+1 & 2+\alpha^2 & 1-2\alpha \\ 0 & 5 & 3\alpha & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_{3,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 5 & 3\alpha & -3 \\ 0 & 2\alpha+1 & 2+\alpha^2 & 1-2\alpha \end{array}\right] \xrightarrow{H_3(5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 5 & 3\alpha & -3 \\ 0 & 5(2\alpha+1) & 5(2+\alpha^2) & 5(1-2\alpha) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_{3,2}(-(2\alpha+1))} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 5 & 3\alpha & -3 \\ 0 & 0 & -\alpha^2-3\alpha+10 & -4\alpha+8 \end{array}\right]$$

$5(1-2\alpha)+3(2\alpha+1)$

$5(2+\alpha^2)-(2\alpha+1)3\alpha$

Il rango della matrice incompleta ottenuta è uguale a 3 per tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$;

tc $-\alpha^2-3\alpha+10 \neq 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+40}}{-2} = \begin{matrix} 2 \\ -5 \end{matrix} \\ \Delta = b^2-4ac \geq 0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\text{rank}(A_\alpha|b) = 3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$$

inoltre $\text{rank}(A_\alpha|b) = \text{rank}\, A_\alpha$, $\alpha \neq -5, 2$ pertanto la soluzione esiste per Rouché-Capelli.

$$f_{\alpha \neq -5,2} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 = \text{Im}\, f_{\alpha \neq -5,2}$$

ossia $f_{\alpha \neq -5,2}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali (endomorfismo perché è anche endomorfismo poiché dom e codominio coincidono e <u>Prop. di Isomorfismo</u>: $f_{\alpha \neq -5,2}$ è suriettiva poiché $\text{Im}\, f_{\alpha \neq -5,2} = \mathbb{R}^3$ codominio e iniettiva poiché $\dim \text{Ker}\, f_{\alpha \neq -5,2} = 0$.

$\dim \operatorname{Ker} f_{\alpha \neq -5,2} = 3 - \operatorname{rank} A_{\alpha \neq -5,2} = 3 - 3 = 0$ - ③

Quindi il sistema ammette uno ed uno solo soluzione (la soluzione particolare).

Da $(A_{\alpha \neq -5,2} | b)$ si ottiene

$$\begin{cases} x - 2y - \alpha z = 2 \\ 5y + 3\alpha z = -3 \\ (-\alpha^2 - 3\alpha + 10) z = -4\alpha + 8 \end{cases} \longrightarrow z = \frac{4\alpha - 8}{\alpha^2 + 3\alpha - 10}$$

... che ha come unica soluzione il vettore

$$x_p = \left(\frac{4\alpha - 8}{\alpha^2 + 3\alpha - 10}, \frac{-3\alpha^2 + 3\alpha + 6}{\alpha^2 + 3\alpha - 10}, \frac{4\alpha - 8}{\alpha^2 + 3\alpha - 10} \right)^T = S_{\alpha \neq -5,2}$$

Se $\alpha = 2$ oppure $\alpha = -5$ la matrice Incompleta ha rango 2 (ultima riga di zeri)

$$\operatorname{rank} A_2 = \operatorname{rank} A_{-5} = 2.$$

$\boxed{\alpha = 2}$ Per $\alpha = 2$ la Matrice Completa

$$(A_2 | b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4(2)+8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pertanto sia la matrice completa che la matrice incompleta hanno rango 2.

Per Rouché-Capelli il sistema ammette soluzioni.

$\dim \operatorname{Ker} f_2 = 3 - \operatorname{rank} A_2 = 3 - 2 = 1$.

Pertanto l'insieme delle soluzioni: $S_2 = X_p + \mathrm{Ker}\, f_2$ è lo spazio affine di dim 1 immerso in $\mathbb{R}^3$.

$$A_2 X_p = b \longrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = 2 \\ 5y + 6z = -3 \end{cases}$$ posto $\underline{x = 1}$

si ha $\begin{cases} 2y + 2z = -1 \\ 5y + 6z = -3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} - y \\ 5y + 6(-\frac{1}{2} - y) = -3 \end{cases}$

$$\begin{cases} z = -\frac{1}{2} - y \\ 5y - 6y - 3 = -3 \end{cases} \longrightarrow y = 0 \longrightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$X_p = (1, 0, -\frac{1}{2})^T$ sol. particolare

$$\mathrm{Ker}\, f_2 = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 5y + 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y + 2z \\ 5y + 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y + 2z \\ 2z = \frac{1}{3}(-5y) = \frac{-5}{3} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - \frac{5}{3} y = \frac{1}{3} y \\ z = -\frac{5}{6} y \end{cases} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f_2 = \left\{ \left(\frac{y}{3}, y, -\frac{5}{6} y\right)^T \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\xrightarrow{y = 6} \; = \langle (2, 6, -5)^T \rangle$$

Pertanto $S_2 = (1, 0, -\frac{1}{2})^T + \langle (2, 6, -5)^T \rangle$.

$\boxed{\alpha = -5}$

$$(A_{-5}|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6-4(-5)+8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 28 \end{array}\right]$$

$\neq 0$

In questo caso non ci sono soluzioni poiché

$$\text{rank } A_{-5} = 2 \neq \text{rank}(A_{-5}|b) = 3$$

verifica: $\exists$ un minore 3×3 di $(A_{-5}|b)$ non singolare (i.e. invertibile)

$$\det\begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 5 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 28 \det\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} = 28(30-25) \neq 0$$

Formula di Laplace $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

Esercizio 2: Risolvere il sistema lineare in x, y, z:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 12z = 0 \\ 4x - z = 0 \\ 6x - 5y = -1 \end{cases}$$

Sol: Matrice Completa $(A|b)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{2,1}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 12 & 0 \\ 0 & 10 & -25 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{3,1}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 12 & 0 \\ 0 & 10 & -25 & 0 \\ 0 & 10 & -36 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_{3,2}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 12 & 0 \\ 0 & 10 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_3(-1),\ H_2(1/5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{array}\right]$$

$\text{rank}(A|b) = \text{rank}\,A = 3 \longrightarrow \dim \text{Ker}\,A = 0$

$\exists !$ soluzione : $\begin{cases} 2x - 5y + 12z = 0 \\ 2y - 5z = 0 \\ 11z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = (5y - 12z)\,\frac{1}{2} = \frac{1}{44} \\ y = \frac{1}{2}\,5z = \frac{5}{22} \\ z = \frac{1}{11} \end{cases}$

$$\frac{25}{22} - \frac{12}{11} = \frac{25-24}{22} = \frac{1}{22}$$

$$\longrightarrow X_p = \left(\frac{1}{44}, \frac{5}{22}, \frac{1}{11}\right)^T$$

Esercizio 3 (x casa) : Studiare al variare del parametro reale h, le soluzioni del sistema nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + hy + z = 1 \\ 2hx + 2z = 0 \\ (1-h)x + hy = h \end{cases}$$

$\text{rank}\,A_h < 3 \ \forall h$.

Sol :

$$(A_h|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 2h & 0 & 2 & 0 \\ 1-h & h & 0 & h \end{array}\right] \xrightarrow{(\dots)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & -2h^2 & 2-2h & -2h \\ 0 & 0 & 0 & -2+2h \end{array}\right]$$

Se $h \neq 1$: $\text{rank}\,A_{h\neq 1} \neq \text{rank}(A_{h\neq 1}|b)$ No SOL

Se $h = 1$ si ha $(A_1|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

si ha $\text{rank}\,A_1 = 2 = \text{rank}(A_1|b) \longrightarrow \dim \text{Ker}\,A_1 = 1$

Il sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y = -2 \end{cases} \longrightarrow x_p = (1, 1, -1)^T$$

Sist. omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \operatorname{Ker} A_1 = \langle (1, 0, -1)^T \rangle$$

Pertanto $S = S_1 = (1, 1, -1)^T + \langle (1, 0, -1)^T \rangle$ _