LEZIONE N° 5 07/04/2021 Algebra

Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V con intersezione banale ($U \cap W = \{\underline{0}\}$).

Allora **non** esiste nessun sottospazio $T \mid T \oplus U = T \oplus W = V$.

E' falso, ad esempio $V = \mathbb{R}^3$ e siano

$U = \langle (1,0,0)^T \rangle$, $W = \langle (0,1,0)^T \rangle$

$U \subseteq V$, $W \subseteq V$, $U \cap W = \{\underline{0}\}$

basta prendere $T = \langle (0,0,1)^T, (1,1,0)^T \rangle$

$T \cap U = T \cap W = \{\underline{0}\} \longrightarrow T \oplus U = T \oplus W = V$ $\boxtimes$

Def (Nucleo): Una applicazione $L: V \longrightarrow W$ tra due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali V e W si dirà lineare se

- $\forall v_1, v_2 \in V$, $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
- $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $L(\alpha v) = \alpha L(v)$

L'insieme immagine mediante L del del dominio V di L si chiama Immagine di L: $\mathrm{Im}(L) = L(V)$.

Consideriamo ora la controimmagine del vettore nullo di W:

$$L^{-1}(\{\underline{0}\}), \quad \underline{0} \in W, \text{ questo è}$$

il sottospazio degli elementi di V che sono mandati mediante L nel vettore nullo di W: tale sottospazio di V si chiama nucleo dell'applicazione lineare L

$$\mathrm{Ker}(L) = \{v \in V \mid L(v) = \underline{0} \in W\} = L^{-1}(\{\underline{0}\}).$$

$\dim \operatorname{Ker} L = \dim V - \dim \operatorname{Im} L$

<u>Def</u> (Sistema lineare): Un sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti reali è una lista di m equazioni lineari nelle incognite $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

$b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$

Il sistema si dice OMOGENEO se $b_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, m$

si dice QUADRATO se $m = n$

La matrice $\underset{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}{\overset{\cap}{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ si dice

<u>matrice incompleta</u>, mentre la matrice $(A|b) =$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$$ si dice

<u>matrice completa</u>. Indichiamo con la <u>Spazio delle Soluzioni</u> del sistema lineare $Ax = b$ con $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$.

Se il sistema è omogeneo $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \underline{0}\}$.

pertanto posto $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \longmapsto L(x) = Ax = b, \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

allora $S_0 = \operatorname{Ker} L \ (\operatorname{Ker} A)$

$b \in \mathrm{Im}\,L$, se $b \notin \mathrm{Im}\,L$ allora il sistema è impossibile $\longrightarrow$ Controllo sul rango con Rouché-Capelli.

Caso generale, $b \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathrm{Im}\,L$, allora lo spazio delle soluzioni non è più uno spazio vettoriale (come lo è S_0) ma è uno Spazio Affine:

$$S = x_p + S_0 = x_p + \mathrm{Ker}\,L$$

$x_p = \begin{bmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione particolare del sistema

t.c. $A \begin{bmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

<u>Teorema</u> (di Rouché-Capelli): Dato un sistema lineare $Ax = b$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ esso ammette soluzione se $\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}(A|b)$ cioè se il rango della matrice incompleta coincide con il rango della matrice completa. Nel caso di uguaglianza le soluzioni sono date dal sottoinsieme $V + \mathrm{Ker}\,A$ di $\mathbb{R}^n$ ove V è una sol. particolare del sistema e $\mathrm{Ker}\,A$ è il nucleo dell'appl.

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Il sottospazio vettoriale $\mathrm{Ker}\,A$ ha dimensione

$$\dim \mathrm{Ker}\,A = \underset{\substack{\uparrow \\ \dim V}}{n} - \underset{\substack{\uparrow \\ \dim \mathrm{Im}\,L}}{\mathrm{rank}\,A}$$

Infine l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale se b è la m-upla nulla, ovvero se il sistema è omogeneo.

Esempio: (Sist. impossibile): $\cancel{\begin{cases} 2x = 1 \\ 4x = 2 \end{cases}}$ $\quad Ax = b$, $\quad x = A^{-1}b$

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ 3x = 4 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ rango } 1$$

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to \det(A|b) = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

rango 2

$\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}(A|b) \to$ il sistema è impossibile

Esercizio 1 Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$, nelle incognite x_1, x_2, x_3

Sol: # incognite $= n = 3 \to \mathbb{R}^3$

equazioni $= m = 2 \to \mathbb{R}^2$
(lin. indip)

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(A|b) = \left[\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{matrix}\right] \to \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = 2$$

il sistema ammette soluzione $S = x_p + \operatorname{Ker} A$, ove

$\dim \operatorname{Ker} A = 3 - 2 = 1$

Sol particolare : $A x_p = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_{1p} - x_{2p} = 1 & \longrightarrow x_{1p} = \frac{1}{2}(1 + x_{2p}) \overset{!}{=} -1 \\ x_{2p} = -3) & \\ x_{3p} = x_3 \in \mathbb{R} & \end{cases}$$

$x_{3p} = 1 \longrightarrow x_p = (-1, -3, 1)^T$

$0x_{1p} + 0x_{2p} + 0x_{3p} = 0$

Sol del sistema lineare omogeneo associato :

$S_0 = \mathrm{Ker}\, L = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = \underline{0} \in \mathbb{R}^2 \} =$

$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (0, 0, x_3)^T, x_3 \in \mathbb{R} \} = \langle (0,0,1)^T \rangle$

L'insieme delle soluzioni è pertanto

$$S = x_p + \mathrm{Ker}\, L = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 2 : Risolvere

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$ nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 -

Sol: in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 3 & -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ va intesa come matrice di un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$.

In particolare A avrà necessariamente nucleo non banale perché la dimensione dell'immagine è al più 3 ($\text{rank} A \leq 3$,

$\dim \text{Ker} A = 4 - \text{rank} A \geq 1$.

Riduciamo a scalini la matrice completa $(A|b)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{3,1}(-3/2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -5/2 & 3/2 & 5/2 & 3/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H_{3,2}(1/2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(2 pivots)}$$

A

il ~~N~~ di pivots è 2, $\dim \text{Im} L = 2$

$\to \dim \text{Ker} L = 4 - 2 = 2$.

Il rango della matrice completa è pure 2 (non ci sono pivots nell'ultima colonna)

Rouché-Capelli $\to S = x_p + \text{Ker} A$

Determiniamo $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0} \in \mathbb{R}^3\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} , \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_4 \\ x_2 = \frac{3}{5} x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\ker A = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x_3 + x_4\right) - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \frac{3}{5}x_3 + x_4, x_3, x_4\right)^T =$$

$$= \left(\frac{3}{10}x_3 - \frac{1}{2}x_3 + \cancel{\frac{x_4}{2}} - \cancel{\frac{x_4}{2}}, \frac{3}{5}x_3 + x_4, x_3, x_4\right)^T =$$

$$= \left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3 + x_4, x_3, x_4\right)^T =$$

$$= \left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3, x_3, 0\right)^T + \left(0, x_4, 0, x_4\right)^T =$$

$$= x_3\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0\right)^T + x_4\left(0, 1, 0, 1\right)^T, \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\to \ker A = \left\langle \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0\right)^T, \left(0, 1, 0, 1\right)^T \right\rangle$$

Adesso resta da trovare una soluzione particolare del sistema completo usando la forma a scalini:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \\ x_{4p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$x_{3p}, x_{4p} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$$

posto ad esempio $x_{3p} = x_{4p} = 0$

si ha $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 5x_2 = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = (1 + (-3/5))\,1/2 \\ x_2 = -3/5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1/5 \\ x_2 = -3/5 \end{cases}$

Pertanto: $S = x_p + S_0 =$

$$\begin{bmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\{ \left(1/5 - 1/5\alpha,\ -3/5 + 3/5\alpha + \beta,\ \alpha,\ \beta\right)^T \middle|\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$