Lez n° 4 Tutorato Algebra (Paolo Rossi) $\mathbb{R}^{\leq 4}[x]$ (1)

$W_1 = \{ aX^3 + bX \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ [es 5a foglio 3]

$W_2 = \{ \alpha X \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

base x $W_1 = \{ a\underline{X}^3 + b\underline{X} \}_{a,b \in \mathbb{R}}$

$\mathcal{B}_{W_1} = \{ X^3, X \}$

base per $W_2 = \{ \alpha X \}_{\alpha \in \mathbb{R}}$

$\mathcal{B}_{W_2} = \{ X \}$

$\rightarrow \langle X^3, X \rangle = W_1, \ \langle X \rangle = W_2$

$W_1 \cap W_2 = \{ \beta X \mid \beta \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \mathcal{B}_{W_2} = \{ X \}$

$W_1 + W_2 = \{ P_1 + P_2 \mid P_1 \in W_1, P_2 \in W_2 \}$

$P_1 = aX^3 + bX, \ a, b \in \mathbb{R}$

$P_2 = \alpha X, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$P_1 + P_2 = aX^3 + (\alpha + b)X$

$\mathcal{B}_{W_1 + W_2} = \mathcal{B}_{W_1} = \{ X^3, X \}.$

$\dim W_1 = 2, \ \dim W_2 = 1, \ \dim W_1 \cap W_2 = 1 \neq 0$

$\dim W_1 + W_2 = 2.$

Teorema (Formula di Grassmann): Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, T_1 e T_2 due suoi sottospazi di dimensione finita, risp. n_1 e n_2. Allora anche l'intersezione $T_1 \cap T_2$ ha dimensione finita e si ha:

$$\dim(T_1+T_2) = \underbrace{\dim T_1 + \dim T_2}_{n_1+n_2 = \dim(T_1 \cup T_2)} - \dim(T_1 \cap T_2)$$

Esercizio: In $M_2(\mathbb{R})$, cioè nello sp. vett. delle matrici quadrate di ordine 2 a coeff. reali, che sappiamo avere dimensione 4, si consideri l'insieme $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a^2 = d^2 \right\}$.

L'insieme U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$?
In caso di risp. negativa, si determini il sottospazio vettoriale generato da U.

Sol: Inizialmente verifichiamo che U contenga il vettore nullo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ – Osserviamo che le matrici

a^2 d^2

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$$

Però $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \notin U$ infatti $1^2 \neq 3^2$

$\rightarrow U$ non è sott. vett. di $M_2(\mathbb{R})$.

Il sottospazio generato da U è il più piccolo sottospazio vett. contenente U. Tale sottospazio deve contenere tutte le combinazioni lineari di elementi di U.

Notiamo che U contiene $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\langle U \rangle$ contiene

anche le loro combinazioni lineari.

es: $C + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U, \in \langle U \rangle$

$C - D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin U, \in \langle U \rangle$

Poiché $A, B, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti e sono in $M_2(\mathbb{R})$

ne sono una base $\longrightarrow \langle U \rangle = M_2(\mathbb{R})$.

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ si considerino i polinomi

$p_1 = x^2 - 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 2x^2 + 1$,

$q_1 = x^3$, $q_2 = 5$, $q_3 = x + 1$. Siano S e T i

sottospazi di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ generati risp. da p_1, p_2, p_3 e

q_1, q_2, q_3: $S = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$, $T = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$.

Determinare:

1) La dimensione di S e T

2) La dimensione di $S \cap T$, $S + T$ e una base di ciascuno di essi.

<u>Sol</u>:

1) I polinomi p_1 e p_2 sono certamente lin. indipendenti dal

momento che $\deg(p_1) = 2$, $\deg(p_2) = 0$.

P_3 è combinazione lineare di P_1 e P_2?

Ossia $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid P_3 = 2x^2+1 = \alpha P_1 + \beta P_2 = \alpha(x^2-1) + \beta(3)$
$\overset{!}{=} \alpha x^2 + 3\beta - \alpha$

$\to \alpha = 2,\ \beta = 1$

$S = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle = \langle P_1, P_2 \rangle$

$\dim S = 2$. Analogamente si può notare che q_1, q_2, q_3 sono lin. indipendenti (hanno grado diverso) $\to \dim T = 3$.

2) Sappiamo allora che la somma di S e T non può essere diretta cioè che la loro intersezione non può essere banale. Infatti:

$\dim S \cap T = \dim S + \dim T - \dim (S+T) =$
$2 + 3 - \dim(S+T) \geq 2 + 3 - 4 = 1$

Dal momento che $S+T$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ e ha pertanto dimensione minore o uguale a quella di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, cioè 4.

Determiniamo $S \cap T$: Un elemento di $S \cap T$ è un polinomio che si scrive contemporaneamente come combinazione lineare di P_1, P_2 e q_1, q_2, q_3: $a(x^2-1) + \underline{b(3)} = \alpha x^3 + \underline{\beta(5)} + \gamma(x+1)$

Otteniamo $a = \alpha = \gamma = 0$ e $5\beta = 3b$. Di conseguenza

Gli unici polinomi che appartengono sia a S che a T sono i polinomi di grado 0: $S \cap T = \langle 1 \rangle$

$$\dim S \cap T = 1 = 2+3 - \dim(S+T)$$

$\to \dim(S+T) = 4 = 5-1$

$S+T = \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ -

Def (rango): Data una matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ diremo rango per righe (o per colonne) di A, $\text{rank} A$, il massimo numero di righe (colonne) linearmente indipendenti di A, pensate come vettori di $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^m$ nel caso colonne).

$\text{rank} A = \dim \text{Im} f$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
$v \longmapsto u = Av$ -

Def (operazioni elementari sulle righe): $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

- H_{ij} (scambio riga i con riga j)
- $H_i(\alpha)$ (moltiplica la riga i per lo scalare $\alpha \in \mathbb{R}$)
- $H_{ij}(\alpha)$ (somma alla riga i α volte la riga j)

Def (Matrice a scalini): $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ è a scalini se

1) le righe che contengono solo zeri sono le ultime
2) il primo elemento non nullo di una riga è sempre più a destra del primo elemento non nullo della riga superiore.

es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ← Pivot: primo elemento $\neq 0$ di una riga

Prop: I vettori riga non nulli di una matrice a scalini sono lin. indipendenti

es: $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad V_1 = (7, 0, 1, 0)$, $V_2 = (0, 7, 1, 1)$, $V_3 = (0, 0, 0, 7)$

$\langle V_1, V_2, V_3 \rangle \equiv \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$

Teorema (Riduzione di Gauss): Ogni matrice può essere ridotta a gradini (scalini) tramite operazioni elementari sulle righe.

Def: Matrice di Gauss-Jordan se:

1) è a scalini

2) ciascun pivot è uguale a 1 ed è l'unico elemento non nullo della propria colonna

es: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è a scalini $\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ in forma di Gauss-Jordan

Teorema: La riduzione di Gauss-Jordan è UNICA.

Esercizio: Siano

$v_1 = (1, 0, 1, -2)$

$v_2 = (1, 1, -2, 0)$

$v_3 = (1, 1, -1, -1)$

$v_4 = (0, 0, -1, 1)$ e $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

Determinare una base $\mathcal{B}$ di W.

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{2,1}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{3,1}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{3,2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{4,3}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_W \qquad A \xmapsto{4} A_W$$

$w_1 = (1, 0, 1, -2)$

$w_2 = (0, 1, -3, 2)$ $\rightarrow W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle =$

$w_3 = (0, 0, 1, -1)$ $= \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

$\mathcal{B}_W = \{ w_1, w_2, w_3 \}$, $\dim W = \# \mathcal{B}_W = 3$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_W = 3$.

$$A_W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{G\text{-}J} A_W'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 1 & \boxed{-3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{2,3}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{1,3}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_W'$$

$\mathcal{B}_W = \{ w_1, w_2, w_3 \}$

Esercizio: Sia $A_W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, ~~siano~~

$U_1 = (1, 0, 0, -1)$
$U_2 = (0, 1, 1, -2)$
$U_3 = (0, 0, 1, -1)$

$\longrightarrow A_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_U = \{ U_1, U_2, U_3 \}$

$U = \langle U_1, U_2, U_3 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

U e W sono uguali?

Sol: A_W e A_U generano lo stesso spazio vettoriale se hanno la stessa forma di Gauss-Jordan (giacché è unica)

$$A_W \xmapsto{G\cdot J} A_W' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{2,3}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A_U'$$

$$A_U \xmapsto{G\text{-}J} A_U'$$

$$\to A_U' = A_W' \to U = W \quad \boxtimes$$