Lez n° 3   23/03/2021   ①

ALGEBRA (Paolo Rossi)

---

e) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$

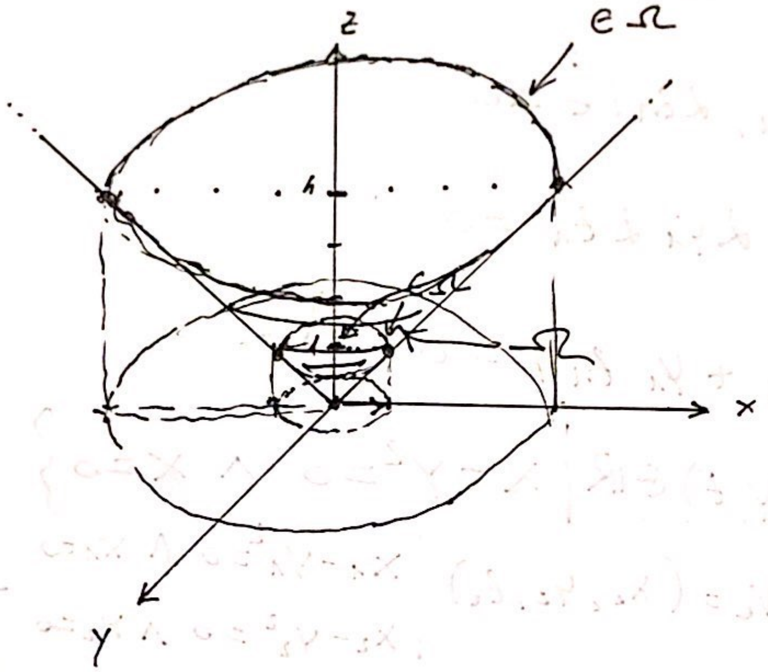
$\forall z \in \mathbb{R}$ ho una circonferenza sul piano XY di raggio $\sqrt{z}$

$z=0 \quad x^2+y^2=0$ se $x=y=0$

$z=1 \quad x^2+y^2=1$

$z=4 \quad x^2+y^2=4$

$\vdots$



Ω è sp. vett? $z=1$, $z=4$

$x^2+y^2=1$ un possibile punto è $x=1$, $y=0 \rightarrow (x,y,z)=(1,0,1) \in \Omega$

$x^2+y^2=4$ " " " " $x=2$, $y=0 \rightarrow (x,y,z)=(2,0,4) \in \Omega$

$(1,0,1)+(2,0,4)=(3,0,5)$

$$x^2+y^2=z \longrightarrow 9+0=5 \qquad 9 \neq 5$$

Ω NON è sp. vett.

2d) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + yz = 0\}$ è sott vett di $\mathbb{R}^3$?

(2)

$V_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\left| \begin{cases} x_1y_1 + y_1z_1 = 0 \\ x_2y_2 + y_2z_2 = 0 \end{cases} \right.$ $\to V_1, V_2 \in \Omega$

$V_1 + V_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \overset{?}{\in} \Omega$

sse $(x_1+x_2)(y_1+y_2) + (y_1+y_2)(z_1+z_2) = 0$

$\cancel{x_1y_1} + x_1y_2 + x_2y_1 + \cancel{x_2y_2} + \cancel{y_1z_1} + y_1z_2 + y_2z_1 + \cancel{y_2z_2} = 0$

$\boxed{y_1(x_2+z_2) + y_2(x_1+z_1) = 0}$ ← Cond. aggiuntiva

$\alpha V_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \overset{?}{\in} \Omega$

se $\alpha x_1 \alpha y_1 + \alpha y_1 \alpha z_1 = 0$

$\alpha^2 (x_1y_1 + y_1z_1) = 0 \quad \forall \alpha$

2f) $\Lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x - y^2 = 0 \wedge x = 0\}$

$V_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\left| \begin{matrix} x_1 - y_1^2 = 0 \wedge x_1 = 0 \\ x_2 - y_2^2 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{matrix} \right.$ $\to V_1, V_2 \in \Lambda$

$\to \begin{cases} V_1 \in \Lambda \text{ se } x_1 = \underline{y_1} = 0 \\ V_2 \in \Lambda \text{ se } x_2 = \underline{y_2} = 0 \end{cases}$

$\alpha V_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in \Lambda$?

se $\alpha x_1 - \alpha^2 y_1^2 = 0 \wedge \alpha x_1 = 0$ ok $\forall \alpha$

$V_1 + V_2 \in \Lambda$?

$x_1 + x_2 - (y_1+y_2)^2 = 0 \wedge (x_1+x_2) = 0$

$(y_1+y_2)^2 = 0 \quad V_1, V_2 \in \Lambda \to V_1 + V_2 \in \Lambda$ è sott vett di $\mathbb{R}^3$.

Una matrice $n \times m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ ad entrate in $\mathbb{R}$ è la tabella di nm numeri reali: a_{ij}, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ collocati in n righe e m colonne.

es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$ individua una matrice 2×3

$a_{12} = 5$, $a_{23} = 4$. Indichiamo l'insieme delle matrici a n righe e m colonne con $M_{n,m}(\mathbb{R})$ $\left[\cong \mathbb{R}^{n \times m}\right]$.

Fissati $n, m \in \mathbb{N}$ l'insieme $M_{n,m}(\mathbb{R})$ può essere munito di una struttura di spazio vettoriale.

es: $M_{2,3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} = C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i,j$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$\mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è il neutro risp. alla somma

$\cap$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$A + \mathbb{O} = A \ -$$

$M_{n,m}(\mathbb{R})$:
- se $n = m$ matrice quadrata $\longrightarrow$ $M_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, con $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$
- se $m = n = 1$ numero reale
- se $n = 1$ vettore riga
- se $m = 1$ vettore colonna -

Es 1: Verificare che l'insieme delle matrici $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ genera lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ -

Sol: $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, pertanto preso $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha $A = a\,e_{11} + b\,e_{12} + c\,e_{21} + d\,e_{22}$ tale scelta è unica poiché le $(e_{ij})_{ij}$ formano la base canonica di $M_2(\mathbb{R})$. Pertanto poiché ogni matrice di $M_2(\mathbb{R})$ è comb. lineare di $\{e_{ij}\}_{ij}$ si ha che $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ è un insieme di generatori (lin. indipendenti) $\longrightarrow$ base di $M_2(\mathbb{R})$

La base generatrice di $M_2(\mathbb{R})$ <u>NON</u> è unica: ad esempio

$\left\{ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

es: Verificare che i seguenti insiemi di matrici sono sottospazi vettoriali di $M_3(\mathbb{R})$ e per ciascuno di essi esibire un insieme di generatori.

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ insieme delle matrici quadrate di ordine 3 ad entrate reali, triangolari strett. superiori

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$ sott. diagonale di $M_3(\mathbb{R})$

c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$ sottospazio delle matrici simmetriche

$C' \in C \to C' = C'^T$
$c_{ij} = c_{ji}$

Sol: L'insieme A è l'insieme delle matrici quadrate $M = (m_{ij})_{ij}$ di ordine 3, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, su $\mathbb{R}$, triangolari strett. superiori, cioè delle matrici quadrate di ordine 3 per cui $m_{ij} = 0$ se $i \geq j$.

Siano $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ due elementi di A

$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + a & b + \beta \\ 0 & 0 & c + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mat triangolare strett superiore $\in A$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a & \lambda b \\ 0 & 0 & \lambda c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ $\quad$ A è sott. vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$

Per determinare un insieme di generatori di A scriviamo che un suo generico elemento:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) $$B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) $$C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Vale che il n° di generatori sia $\frac{n(n+1)}{2}$, $n=3 \to \frac{3(3+1)}{2} = 6$

<u>Def</u>: Si dice dimensione di uno ~~spat~~ spazio vettoriale la cardinalità (il numero di elementi) di una sua qualunque base. Convenzionalmente lo sp. vett. banale (contiene solo il vettore nullo) ha dimensione 0.

<u>Teorema</u>: Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette (almeno) una base:

1) Ogni insieme lin. indipendente si può completare a una base
2) Ogni insieme generatore contiene almeno una base dello spazio.

<u>esempio</u>: Determiniamo una base dello sp. vettoriale $M_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lin. indipendenti $\longrightarrow$ base di $M_{2,3}(\mathbb{R})$

$\dim M_{2,3} = \#$ base $= 6$

<u>esercizio</u>: Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matrici di $M_2(\mathbb{R})$.

Stabilire se A, B sono lin. indipendenti. Completare l'insieme $\{A, B\}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$.

<u>Sol</u>: Prendiamo una combinazione lineare delle matrici A e B e poniamola uguale a $\mathbb{O}_{2\times 2}$ cioè alla matrice nulla. Presi $r, s \in \mathbb{R}$:

$$rA + sB = \begin{pmatrix} 3r-5s & s \\ 2r+4s & -r+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{se } r = s = 0$$

quindi A e B sono lin. indipendenti. Completare l'insieme $\{A, B\}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ significa individuare due elementi $C, D \in M_2(\mathbb{R})$ t.c. $\{A, B, C, D\}$ sia una base di $M_2(\mathbb{R})$.

Verificare è x caso che si può

scegliere $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio: Sia $W = \{ (2s+t, s-t, s+t, s+2t) \mid s,t \in \mathbb{R} \}$.

a) Verificare che W è sott. vett. di $\mathbb{R}^4$

b) determinare una base $\mathcal{B}$ di W

c) completare $\mathcal{B}$ ad una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di $\mathbb{R}^4$.

Sol: a) Siano $v = (2s+t, s-t, s+t, s+2t)$, $w = (2r+p, r-p, r+p, r+2p)$

con $s,t,r,p \in \mathbb{R}$, $v,w \in W$. Allora $v+w \in W$ poiché

$v+w = (2s+t+2r+p,\ s-t+r-p,\ s+t+r+p,\ s+2t+r+2p) =$

$= (2(s+r)+(t+p), (s+r)-(t+p), (s+r)+(t+p), (s+r)+2(t+p))$

Analogamente $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in W$, $\lambda v \in W \to W$ è sott vett. di $\mathbb{R}^4$.

b) Individuiamo un insieme di generatori per W. Osserviamo che ogni vettore di W è della forma $(2s+t, s-t, s+t, s+2t) = s(2,1,1,1) + t(1,-1,1,2)$

il che consente di affermare che i vettori $(2,1,1,1)$, $(1,-1,1,2)$ generano W.

Essendo inoltre lin. indipendenti, individuano una base:

$\mathcal{B} = \{ (2,1,1,1), (1,-1,1,2) \}$.

c) Per ottenere una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di $\mathbb{R}^4$ possiamo aggiungere alla base $\mathcal{B}$ i vettori $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$. Verificando che i vettori $(2,1,1,1)$, $(1,-1,1,2)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ sono lin. indip. si conclude che, poiché $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, essi individuano una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-1/2)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 pivots.