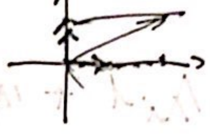
Lez. n° 2 Algebra TUTORATO - Paolo Rossi 16/03/2021 (1)

Def: Sia V sp. vettoriale, siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di V e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ elementi di $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$). Allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ è detta combinazione lineare di $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Ossia $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ è una combinazione di $\{v_1, \dots, v_n\}$ se $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$



$v_1 = (1, 0) = e_1$

$v_2 = (0, 1) = e_2$ (vedremo $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$)

allora $v = (5, 7)$ è combinazione lineare di $\{v_1, v_2\}$, infatti

$$v = 5 v_1 + 7 v_2 = 5(1, 0) + 7(0, 1) = (5, 7) \text{ quindi}$$

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \; (\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 7)$$

Def: Sia V sp. vettoriale. Sia $S \subseteq V$ (sottoinsieme), diremo sottospazio generato dal sottoinsieme S il più piccolo sottospazio di V contenente S e lo denoteremo con $\langle S \rangle$ oppure con $\mathrm{span}\{S\}$.

Esempio: Sia $V = \mathbb{R}^2$

$S = \{(1, 1)\}$. Allora $\langle S \rangle = \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ sottospazio generato dalle combinazioni lineari degli elementi di S:

$(\lambda, \lambda) = \lambda(1, 1)$.

__esempio__: Sia $V = \mathbb{R}^{\leq n}[x]$, $n \geq 3$, spazio vettoriale dei polinomi di grado n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) a coefficienti reali.

V è spazio vettoriale, infatti sia $p(x)$ un polinomio di V allora

- $\lambda\, p(x) \in V \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (es. $p(x) = x^3 + 2x - 7$)
- $p(x) + q(x) \in V \;\; \forall\, p(x), q(x)$ polinomi di V

Sia $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ allora

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot x^3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$\stackrel{!}{=} \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \subseteq V$$

sottospazio vettoriale generato dalla combinazione lineare degli elementi di S.

__Def__: Un $\mathbb{R}$-spazio vett. V si dice __finitamente generato__ se $\exists$ un insieme __finito__ di vettori $v_1, \dots, v_n$ tale che __ogni__ vettore di V sia loro combinazione lineare. I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono allora __Generatori__ di V.

__Esercizio__: Stabilire se i seguenti insiemi di vettori generano $\mathbb{R}^3$.

dobbiamo vedere se $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei vettori assegnati

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Sol: a) Sia $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ un generico vettore di $\mathbb{R}^3$, ci chiediamo se

$\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tc

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \beta = \lambda_2 + \lambda_3 \\ \gamma = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases} \qquad \alpha - \beta = 2\lambda_2 + \lambda_3 - (\lambda_2 + \lambda_3) \stackrel{!}{=} \lambda_2$$

$$2\beta - \alpha = 2(\lambda_2 + \lambda_3) - (2\lambda_2 + \lambda_3) \stackrel{!}{=} 2\lambda_3 - \lambda_3 = \lambda_3$$

$$\gamma = \lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 + (2\beta - \alpha) \longrightarrow \lambda_1 = \gamma - 2\beta + \alpha$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma - 2\beta + \alpha \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 = \alpha - \beta \in \mathbb{R} \\ \lambda_3 = 2\beta - \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$$

b) Sono presenti 2 vettori, anche se fossero lin. indipendenti (ossia non uno multiplo dell'altro) potrebbero al max generare un sottospazio di dimensione 2 (immerso in $\mathbb{R}^3$). Basta esibire un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non è combinazione lineare di $(2\ 3\ 4)^T$, $(3\ 2\ 1)^T$.

Prendiamo ad esempio $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: è combinazione lineare di $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

Dovrebbero $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tc

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1+3\lambda_2\\3\lambda_1+2\lambda_2\\4\lambda_1+\lambda_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}1 = 2\lambda_1+3\lambda_2\\0 = 3\lambda_1+2\lambda_2\\0 = 4\lambda_1+\lambda_2\end{cases}$$

infatti dalla 3^a: $\lambda_2 = -4\lambda_1$;

nella 2^a: $0 = 3\lambda_1+2\lambda_2 = 3\lambda_1 + 2(-4\lambda_1) =$

$= 3\lambda_1 - 8\lambda_1 = -5\lambda_1$

$\to \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, ma $\underline{1} = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

Pertanto $\left\langle \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ (di dim 2 perché i due vett. sono lin. indip.)

c) $\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\lambda_1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\lambda_2}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \underbrace{2}_{\lambda_3}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$

4° vett. lin. dipendente $\to$ è una combinazione lineare dei primi 3. Inoltre

$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$ poiché tali vettori sono

lin. indipendenti $\longrightarrow$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.
(e generano $\mathbb{R}^3$).

Esercizio: Mostrare che l'insieme dei polinomi

$\{3+x, x^2, 1+x^2+x^3\}$ NON è un insieme di generatori

di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

Sol: Prendiamo un monomio di grado 0, ad es. 1 vediamo

se è possibile scriverlo come combinazione lineare dei polinomi

$3+x$, x^2, $1+x^2+x^3$. Ossia cerchiamo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tc

$$1 = \alpha(3+x) + \beta(x^2) + \gamma(1+x^2+x^3) =$$

$$\overset{!}{=} \gamma x^3 + (\gamma+\beta)x^2 + \alpha x + (3\alpha + \gamma)$$

Due polinomi sono uguali se i coefficienti dei monomi dello stesso grado

dei due polinomi coincidono.

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \gamma + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ 3\alpha + \gamma = 1 \longrightarrow 3 \cdot 0 + \overset{0}{\gamma} = \underline{\underline{1 = 0}} \end{cases}$$ No sol!

Pertanto $\langle 3+x, x^2, 1+x^2+x^3 \rangle = \text{span}\{3+x, x^2, 1+x^2+x^3\}$

$$\neq \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$$

Def: Dato uno sp. vettoriale V e un sottoinsieme $S \subseteq V$ diremo che S è un insieme di vettori linearmente indipendenti se l'unica combinazione lineare $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \underline{0}$ con $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ è quella con $\lambda_1 = 0 = \ldots = \lambda_n$.

es:
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ lin ind. poiché

$$(0,0)^T = \alpha(1,0)^T + \beta(0,1)^T = (\alpha, \beta)^T$$

sse $\alpha = \beta = 0$.

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ lin indip. poiché

$$(0,0)^T = \alpha(1,0)^T + \beta(2,1) = (\alpha + 2\beta, \beta)^T$$

sse $\alpha = \beta = 0$.

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ lin dip. (infatti $(4,6)^T = 2(2,3)^T$)

poiché $(0,0)^T = \alpha(2,3)^T + \beta(4,6)^T = (2\alpha + 4\beta, 3\alpha + 6\beta)^T$

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + 4\beta \\ 0 = 3\alpha + 6\beta \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta \\ 0 = \alpha + 2\beta \end{cases} \longrightarrow 0 = \alpha + 2\beta$$

1 eq, 2 incognite

(sp. soluzioni ha dim 1)

Quindi si ha il vettore nullo $\forall$ coppia di combinatori nella forma $\alpha = -2\beta$.

$$(0,0)^T = -2\beta\,(2,3)^T + \beta\,(4,6)^T \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}$$

$\uparrow \beta = 0$

Def (BASE): Dato uno spazio vett. V e un sottoinsieme $S \subseteq V$, S si dice BASE di V se S genera V (i.e. $\langle S \rangle = V$) e i vettori di S sono linearmente indipendenti.

Esercizio (x Casa): Si verifichi che $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

ossia: verificare che
- i vettori dati sono lin. indipendenti.
- i vettori dati generano $\mathbb{R}^3$

es di prima:

a) $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$: $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$: $\begin{pmatrix}2&3&4\\3&2&1\end{pmatrix} \xrightarrow{H_{2,1}(-3/2)} \begin{pmatrix}2&3&4\\0&-5/2&-5\end{pmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&2\\1&3&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_{4,1}(1/2)\\H_{4,2}(-3/2)\\H_{4,3}(-2)}]{} \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[H_{2,1}(-1)]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$