luca claudegino.lebon@studenti.unipd.it 08/03/2021

Lez 1. Algebra - Paolo Rossi

Gli insiemi sono contenitori di elementi, $a \in A$, A è insieme anche se $a = \emptyset$. Se a è un vettore e $a \in A$ allora A è un insieme di vettori.

Per introdurre il concetto di spazio vettoriale è necessario introdurre delle operazioni tra gli elementi dell'insieme.

$v = (x_1, x_2)$ $\quad v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$w = (y_1, y_2)$

$\lambda v = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

Consideriamo gli insiemi di Numeri, ossia $a \in A$ se a è un numero.

Gli insiemi "standard" ordinati e infiniti:

$\mathbb{N} = \{0; 1; \dots, +\infty\}$] discreto, numerabile

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} \setminus \{0\} = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ ← $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è denso se $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in \mathbb{Q} \mid y \in I_\varepsilon(x_0)$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ← più che numerabile, continuo con la potenza del continuo.

$\mathbb{C}$

$\mathbb{H}$,

$x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow$ o $x_0 \in \mathbb{Q}$, o x_0 è di accumulazione per $\mathbb{Q}$.

$$\overline{\mathbb{Q}} \equiv \mathbb{R}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Def (operazione binaria): $* : A \times A \longrightarrow B$

$$\begin{array}{ccc} a, & b & \longmapsto c = a * b \end{array}$$

A, B insiemi. Se $B = A$ allora $*$ è detta interna.

$(+, \cdot) \leftarrow$

Def (Magma): $(A, *)$ è un magma se $*$ è interna.

ossia se $\forall a, b \in A$, $c = a * b \in A$

es: $(\mathbb{N}, +)$ è un magma $\underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{2}} + \underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{4}} = 6 \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, \cdot)$.

es: L'insieme $A = \{1, -27, \pi\}$ non è un magma risp. alla $+$

poiché $1 + (-27) = -27 \notin A$

Def (Semigruppo): $(A, *)$ magma, se vale la prop. associativa

$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$, $(A, *)$ semigruppo.

Def (Monoide): $(A, *)$ è un monoide se $\exists\, e \in A$ elemento neutro

tc $a * e = a \quad \forall a \in A$.

$* = + \longrightarrow a + e = a$ se ~~...~~ $e = 0$

$* = \cdot \longrightarrow a \cdot e = a$ se $e = 1$

$0 = a + (-a)$, $\leftarrow$ $a + 0 = a$

$a \cdot 1 = a$

$1 = a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = a^{1+(-1)} = a^0 \quad \forall a$

<u>Def</u> (Gruppo): $(A, *)$ Monoide, se $\exists\, i \in A$ elemento inverso tc $a * i = e \quad \forall a \in A$, $(A, *)$ è un gruppo -

$+ \to i = -a$

$\cdot \to i = 1/a$

$(\mathbb{N}, +)$ <u>non</u> è un gruppo

$5 + i = 0 \qquad i = -5 \notin \mathbb{N}$

$(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no

<u>Def</u>: Se $(A, *)$ è un gruppo in cui vale la prop. commutativa

$a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$

$\to$ $(A, *)$ gruppo abeliano -

$(\underline{A}, +, \cdot)$

Def ((Campo): Diremo la tupla $(A,+,\cdot)$ campo se $(A,+)$, $(A,\cdot)$ sono gruppi abeliani e vale la prop. distributiva

$$a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c) \quad \forall a,b,c \in A$$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $(\mathbb{C}) \longrightarrow \underline{(\mathbb{R},+,\cdot)}$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

Def: Vettore n-dimensionale l'n-upla di numeri reali ~~reale~~

$$(a_1,\dots,a_n)^T, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i=1,\dots,n$$

Def: Sp. Vettoriale (sul campo $\mathbb{R}$)

È un insieme non vuoto V dotato di un operazione interna $V\times V \longrightarrow V$, $a,b \longmapsto a+b$ la somma, e di un operazione esterna $\mathbb{R}\times V \longrightarrow V$, $\alpha, v \longmapsto \alpha v$ detto prodotto per uno scalare $\alpha\in\mathbb{R}$ tali che presi due suoi elementi $v,u\in V$

$v+u \in V$, e inoltre $\alpha v \in V$, $\forall v\in V$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Prop: Un sottoinsieme U di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V se $\forall u\in U$ e $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ si ha

- $\lambda u \in U$ (anche per $\lambda=0$)
- $u+v \in U \quad \forall u,v\in U$

Esercizi:

1) Sia $v = (1,-2)^T \in \mathbb{R}^2$

$u = (0,1)^T \in \mathbb{R}^2$

Calcolare $z = 2v + 4(v-u) = (2,-4)^T + 4\left[\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right] =$

$$\begin{cases} \alpha(v_1,v_2)^T = (\alpha v_1, \alpha v_2)^T \\ (v_1,v_2)^T + (u_1,u_2)^T = (v_1+u_1, v_2+u_2)^T \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} + 4\left[\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-16\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

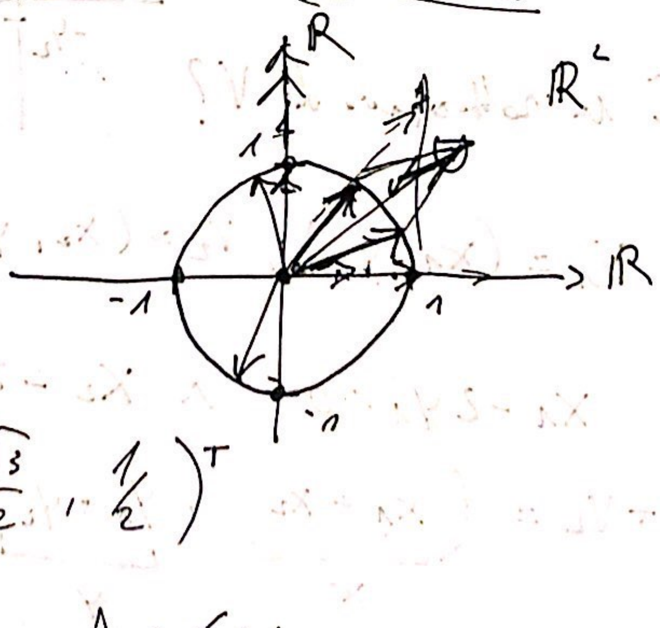
2) Sia $V = \mathbb{R}^2$

r^2 $\qquad \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Sia $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

eq. quadratica NON è lineare

U è un sottospazio vett. di V?



No poiché $(0,0)^T \notin U$

oppure prendo $\lambda \neq 1 \in \mathbb{R}$

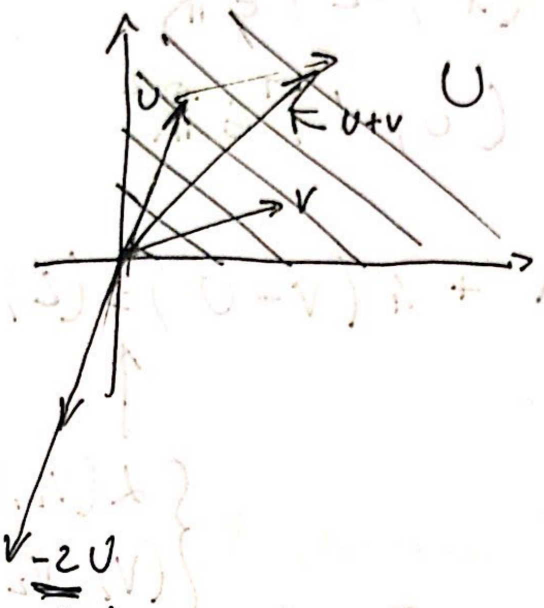
sia $u \in U$, per es $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$

$\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1\right)$, $\lambda u \notin U$

3) Sia $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ è il 1° quadrante

U è sottospazio vett?

NON è un sott. vett.



$\lambda = -3$ e $u = (2,3)^T$ $\quad \lambda = -2 \in \mathbb{R}$

$\lambda u = (-6, -27)^T \notin U$.

eq. lineare (1° grado, coeff. reali)

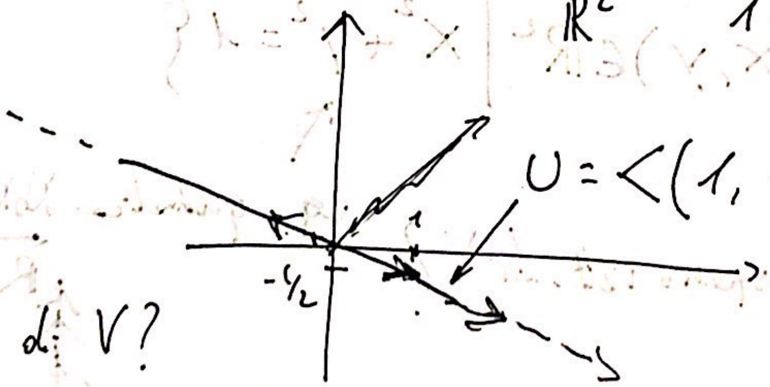
NO TERMINE NOTO

4) Sia $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$

$\mathbb{R}^2$ $\quad x = 1$

$1 - 2y = 0$

$\to y = -1/2$



$U = \langle (1, -1/2)^T \rangle$

generatore

U è un sottospazio di V?

Sia $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, $v_1, v_2 \in U$

t.c. $x_1 - 2y_1 = 0 \wedge x_2 - 2y_2 = 0$

- $v_1 + v_2 = (\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y}) \in U$

infatti $(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda v_1 = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \in U$

infatti $\underbrace{\lambda x_1}_{x} - 2\lambda x_2 = \lambda(x_1 - 2y_1) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\longrightarrow$ U è sottospazio di V.

Operazioni tra sottospazi:

Prop: In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V l'intersezione $S_1 \cap S_2$ di due sottospazi S_1 e S_2 è un sottospazio vett. di V.

Però l'unione di due sottospazi non è in generale un sottospazio.

esempio: Sia $V = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

$U_1 = \{(x,y) \mid x = y\}$ retta

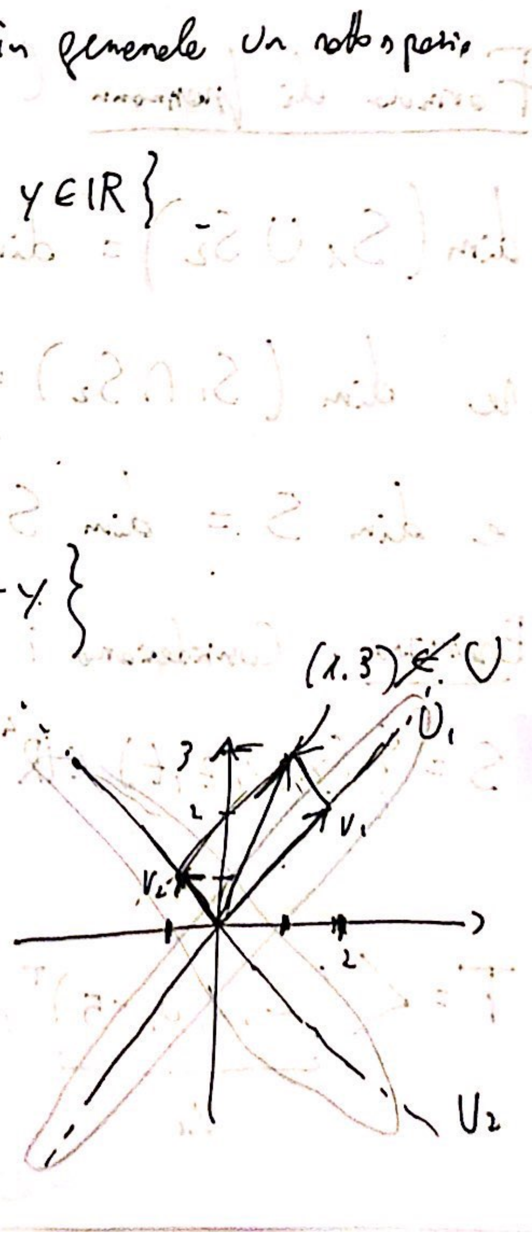
$U_2 = \{(x,y) \mid x = -y\}$ retta

$U = U_1 \cup U_2 = \{(x,y) \mid x = y \lor x = -y\}$

U non è chiuso rispetto alla somma, infatti

$\underset{= v_1}{(2,2)} \in U_1$, $\underset{= v_2}{(-1,1)} \in U_2$

$(2,2) + (-1,1) = (1,3) \notin U$



Def: Sia V un $\mathbb{R}$-sp. vettoriale e S_1, S_2 due suoi sottospazi. Si definisce $S = S_1 + S_2$ l'insieme

$$S = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in S_1, v_2 \in S_2 \}.$$

S è un sottospazio vett. di V ed è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene sia S_1 che S_2.

Se $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$ allora $S = S_1 \oplus S_2$ sono in somma diretta.

Formula di Grassmann (Spoiler):

$$\dim(S_1 \cup S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2)$$

se $\dim(S_1 \cap S_2) = 0 \longrightarrow S_1 + S_2 = S_1 \oplus S_2 = S$

e $\dim S = \dim S_1 + \dim S_2$.

Esercizio: Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + y + 2z = 0 \}$$

$1 \text{ eq} \to \text{gdl} = 4 - 1 = 3 \to \dim S = 3$

$$T = \langle \underbrace{(2, 1, 0, -5)^T}_{v_1}, \underbrace{(3, 4, 0, 0)^T}_{v_2} \rangle \quad \leftarrow \dim T = 2.$$

Stabilire se S e T sono in somma diretta e calcolare $\dim S+T$.

Sol: Determiniamo l'intersezione di S e T. Un generico elemento di T ha la forma

$$\underset{T}{\underset{\cap}{v}} = \alpha v_1 + \beta v_2 = (2\alpha + 3\beta, \alpha + 4\beta, 0, -5\alpha), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

v appartiene ~~co~~ ad S se le sue coordinate soddisfano l'equazione di S: $\cancel{\beta}\ 6\alpha + 9\beta + \alpha + 4\beta = 0$

$$\rightarrow 7\alpha + 13\beta = 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 13(2) = 26 \\ \beta = -7(2) = -14 \end{cases}$$

$$7 \cdot 26 + 13 \cdot (-14) = 0$$

$$7 \cdot 13 \cdot 2 + 13 \cdot (-7 \cdot 2) = 0$$

~~v appartiene~~

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 \overset{\in S}{=} 13(2, 1, 0, -5) - 7(3, 4, 0, 0)$$

$$= (5, -15, 0, 65) \in S \cap T$$

Come ogni suo multiplo. Pertanto $S+T$ non è in somma diretta e $S \cap T = \langle v \rangle$. $\dim S \cap T = 1$

$$\rightarrow \dim(S+T) = \underbrace{\dim S + \dim T}_{\dim S \cup T} - \dim S \cap T = 3 + 2 - 1 = 4 \longrightarrow S+T = \mathbb{R}^4$$