F12.2 Nello spazio euclideo usuale si considerino

$\pi_1 : (2,3,4) + \langle (2,2,-1), (0,1,-2) \rangle$

$\pi_2 : (-1,2,1) + \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle$

$r : (0,0,1) + \langle (1,-1,-1) \rangle$

(a) Trovare una forma cartesiana per π_1 e π_2.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2s \longrightarrow s = \frac{x-2}{2} \\ y = 3 + 2s + t \longrightarrow t = y - 3 - 2s = y - 3 - x + 2 = y - x - 1 \\ z = 4 - s - 2t \longrightarrow z = 4 - \frac{x-2}{2} - 2y + 2x + 2 \end{cases}$$

$2z = 8 - x + 2 - 4y + 4x + 4$

$3x - 4y - 2z = -14$

$\pi_1 : 3x - 4y - 2z = -14$

$$\begin{cases} x = -1 + s + t \longrightarrow x = -1 + y - 2 + z - 1 \\ y = 2 + s \longrightarrow s = y - 2 \\ z = 1 + t \longrightarrow t = z - 1 \end{cases}$$

$x - y - z = -4$

$\pi_2 : x - y - z = -4$

(b) Trovare una forma cartesiana per r.

$$\begin{cases} x = 0 + t \longrightarrow t = x \\ y = 0 - t \longrightarrow y = -x \\ z = 1 - t \longrightarrow z = 1 - x \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

(c) Determinare forma parametrica e cartesiana della retta s parallela a π_1 e π_2 e passante per $(1,-1,0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$$ dove $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è una direzione sia di π_1 che di π_2.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è direzione di $\pi_1 \iff 3a - 4b - 2c = 0 \leftarrow$ (equazione cartesiana di π_1 omogeneizzata)

di $\pi_2 \iff a - b - c = 0 \leftarrow$ (" di π_2)

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \\ 3a - 4b - 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad II - 3I \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = y+z = 2z \\ y = z \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La retta s è $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \longrightarrow x = 1 + 2z \\ y = -1 + t \longrightarrow y = -1 + z \\ z = t \longrightarrow t = z \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

(d) Determinare il piano π ortogonale a r e passante per $(0,0,1)$. Scriverne equazioni parametriche e cartesiane.

ortogonali alla direzione della retta r

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad r: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

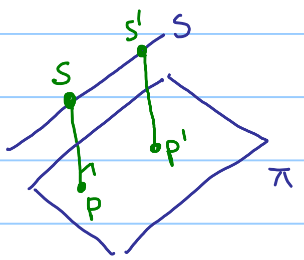
$$\begin{cases} x = s \longrightarrow s = x \\ y = s + t \longrightarrow y = x + 1 - z \\ z = 1 - t \longrightarrow t = 1 - z \end{cases} \qquad \pi: x - y - z = -1.$$

(e) Determinare la distanza tra la retta s e il piano π.

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{III - I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{III + II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

La retta è parallela al piano, ma non è contenuta nel piano.



Prendiamo un punto qualsiasi della retta s e un punto generico del piano π, e imponiamo che il vettore $S-P$ sia ortogonale al piano π.
La distanza tra s e π è $\|S-P\|$.

$$s: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \qquad \pi: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} s \\ s+t \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad S - P = \begin{pmatrix} 1-s \\ -1-s-t \\ -1+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (S-P) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (S-P) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-s-1-s-t=0 \\ -1-s-t+1-t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2s-t=0 \\ -s-2t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=0 \\ s=0 \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d(\pi, s) = \|S-P\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}.$$

<u>ESERCIZIO</u> Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} kx - 8z = k \\ y = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2kz = 0 \\ y + (2-k)z = 0 \end{cases}$$

(a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si discuta la posizione reciproca di r e s.

$$\begin{cases} kx - 8z = k \\ y = 1 \\ x - 2kz = 0 \\ y + (2-k)z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & -8 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \mathrm{III} \\ \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \\ k & 0 & -8 & k \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-k & -1 \\ k & 0 & -8 & k \end{array}\right)$$

$k \neq 2$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \frac{\mathrm{III}}{2-k} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-2} \\ k & 0 & -8 & k \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x - 2kz = 0 \longrightarrow x = \frac{2k}{k-2} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{k-2} \\ kx - 8z = k \end{cases}$$

lecito perché $2-k \neq 0$.

L'ultima equazione è soddisfatta se e solo se

$$\frac{2k^2}{k-2} - \frac{8}{k-2} = k \qquad 2k^2 - 8 = k^2 - 2k$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k+4)(k-2) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow k = -4 \\ \searrow k = 2 \end{array}$$

valore escluso perché stiamo assumendo $k \neq 2$.

ripartiamo dalla matrice evidenziata

$k=-4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

R-C: il sistema ha sol. e la soluzione è unica

$\Rightarrow$ le due rette si intersecano in un punto.

$k \neq 2, -4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le due rette non si intersecano e non hanno direzioni non nulle in comune

$\Rightarrow$ sono sghembe.

$k=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -8 & 2 \end{array}\right)$$

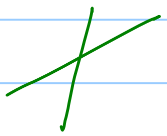
$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-2I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ IV+2III \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \times & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

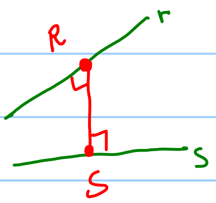
Le due rette non si intersecano, ma hanno una direzione comune

$\Rightarrow$ sono parallele.

(b) Trovare la distanza tra le due rette nel caso $k=-4$, $k=0$.



$k=-4$ le due rette si intersecano in un punto, quindi $d(r,s)=0$.



$k=0$ Prendiamo un punto generico di r, un punto generico di s e imponiamo che il vettore differenza sia ortogonale sia ad r che ad s. La distanza è $\| R-S \|$.

$$r: \begin{cases} z=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad s: \begin{cases} x=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$R = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -2s \\ s \end{pmatrix} \qquad R-S = \begin{pmatrix} t \\ 1+2s \\ -s \end{pmatrix}$$

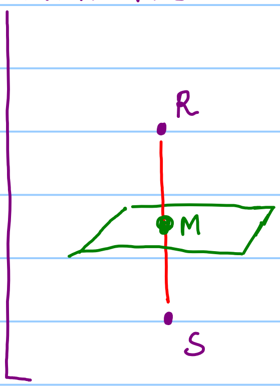
$$\begin{cases} (R-S)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0 \\ (R-S)\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=0 \\ -2-4s-s=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=0 \\ s=-2/5 \end{cases}$$

I punti di minima distanza sono $R=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $S=\begin{pmatrix}0\\4/5\\-2/5\end{pmatrix}$, e la distanza è

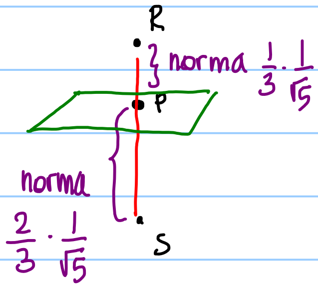
$$d(r,s)=\|R-S\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\1/5\\2/5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{0+\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{1}{\sqrt5}.$$

(c) Determinare un piano a distanza $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt5}$ da R e a distanza $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt5}$ da S

DOMANDA PRELIMINARE: determinare un piano che abbia la stessa distanza da R e da S.



Prendiamo il piano ortogonale al vettore $R-S$, passante per il punto medio di R e S.



Prendiamo il piano ortogonale al vettore $R-S$, passante per il punto P, dove P è il punto del segmento RS tale che $\|P-S\|=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt5}$.

$$P=S+\alpha\begin{pmatrix}0\\1/5\\2/5\end{pmatrix}$$

$$\|P-S\|=\left\|\alpha\begin{pmatrix}0\\1/5\\2/5\end{pmatrix}\right\|=\alpha\frac{1}{\sqrt5}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt5}\iff\alpha=\frac{2}{3}$$

$$P=S+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1/5\\2/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4/5\\-2/5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2/15\\4/15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\14/15\\-2/15\end{pmatrix}$$

$$\langle(R-S)\rangle^\perp=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1/5\\2/5\end{pmatrix}\right\rangle^\perp=\left\langle\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Il piano cercato è

$$\begin{pmatrix}0\\14/15\\-2/15\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle.$$