ES Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $2x_1 - x_2 + x_4 = 0$

(a) Si calcoli una base di U e $U^\perp$.

$$x_1 = \frac{x_2 - x_4}{2} \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1° modo $U^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^4 : v \cdot u = 0 \ \forall u \in U \}$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, possiamo trovare una base di $U^\perp$.

2° modo $\dim U = 3 \Rightarrow \dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U = 1$

$\Rightarrow U^\perp = \langle u \rangle$

$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$

$U = (U^\perp)^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^4 : x \cdot u = 0 \}$

$2x_1 - x_2 + x_4 = 0$

Affinchè le due condizioni siano equivalenti, possiamo scegliere $u = \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}$.

$$U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Si determini la matrice rispetto alle basi canoniche della proiezione ortogonale su U.

Dato che $\dim U^\perp = 1$, possiamo prima trovare $\pi^\perp_{U^\perp}$ e poi calcolare per sottrazione $\pi^\perp_U(v) = v - \pi^\perp_{U^\perp}(v)$.

$$\pi^\perp_{U^\perp}(v) = \frac{v \cdot u}{u \cdot u}\, u = \frac{\begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1 \end{pmatrix} = \frac{2a - b + d}{6} \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}$$

$$\pi^\perp_U(v) = v - \pi^\perp_{U^\perp}(v) = \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} - \frac{2a-b+d}{6} \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6a - 4a + 2b - 2d \\ 6b + 2a - b + d \\ 6c \\ 6d - 2a + b - d \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2a + 2b - 2d \\ 2a + 5b + d \\ 6c \\ -2a + b + 5d \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi^\perp_U} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(Come previsto dalla teoria, la matrice è simmetrica)

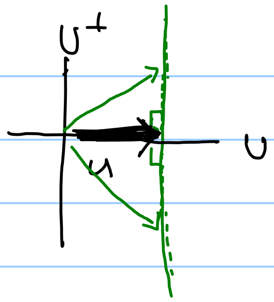
(c) Dato $u = (1,1,1,-1) \in U$, determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ t.c.

$\pi_U^\perp(v) = \pi_U^\perp(u)$.

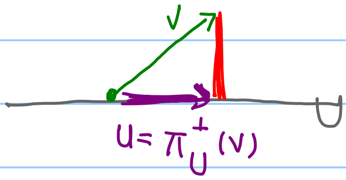
Dato che $u \in U$, $\pi_U^\perp(u) = u$.

L'insieme cercato è

$$\underbrace{u}_{\text{soluzione particolare}} + \ker(\pi_U^\perp) = u + U^\perp$$



(d) Dato $v = (2,0,4,0)$, trovare $u \in U$ che rende minima la norma di $v-u$.



FATTO Dobbiamo prendere $u = \pi_U^\perp(v)$.

$u \in U$ — quindi i due vettori sono ortogonali

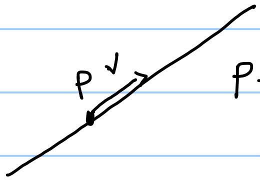
$$\|v-u\|^2 = \| \underbrace{v - \pi_U^\perp(v)}_{\in U^\perp} + \underbrace{\pi_U^\perp(v) - u}_{\in U} \|^2$$

Pitagora

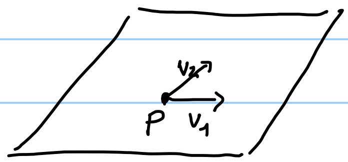
$$= \underbrace{\|v - \pi_U^\perp(v)\|^2}_{\text{è indipendente dal vettore } u} + \underbrace{\|\pi_U^\perp(v) - u\|^2}_{\geq 0 \text{ ed è } = 0 \iff u = \pi_U^\perp(v).}$$

Il vettore richiesto è $u = \pi_U^\perp(v) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 24 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

GEOMETRIA



$P + \langle v \rangle$



$P + \langle v_1, v_2 \rangle$

F 11.2 Siano dati i piani di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

π_1: $2x - y = 2$ $\qquad$ π_2: $(1,-1,1) + \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$

(a) Trovare eq. parametriche per π_1 ed eq. cartesiane per π_2.

$$\begin{pmatrix} \frac{y}{2} + 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x = 1+s & \longrightarrow \quad s = x-1 \\ y = -1 \quad +t & \longrightarrow \quad t = y+1 \\ z = 1+s & \longrightarrow \quad z = 1+s = 1+x-1 = x \longrightarrow x-z=0 \end{cases}$$

$\pi_2: \ x - z = 0$

(b) Determinare la posizione reciproca di π_1 e π_2. Dare eq. par. e cartesiane di $\pi_1 \cap \pi_2$

$$\pi_1 \cap \pi_2 \quad \begin{cases} 2x - y \quad = 2 \\ x \quad -z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \mathrm{II} \\ \mathrm{I}-2\mathrm{II} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

R-C: l'insieme delle soluzioni si può descrivere usando 1 parametro

π_1 e π_2 si intersecano in una retta.

$$r: \begin{cases} x \quad -z = 0 & \longrightarrow \quad x = z \\ -y+2z = 2 & \longrightarrow \quad y = -2+2z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} z \\ -2+2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r: \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(c) Determinare il piano contenente $\pi_1 \cap \pi_2$ e parallelo a $(1,-1,2)+\langle(1,1,0)\rangle$.

Il piano è della forma $P + \langle w_1, w_2 \rangle$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right.}_{\text{la retta } \pi_1\cap\pi_2 \text{ è contenuta nel piano}} , \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle}_{\text{il piano è parallelo a } (1,1,0).}$$

(d) Determinare una retta $\overbrace{\text{parallela sia a } \pi_1 \text{ che a } \pi_2}^{1}$ e $\overbrace{\text{complanare con}}^{2}$ la retta $(1,-1,2)+\langle(1,1,0)\rangle$.

La retta è della forma $P + \langle s \rangle$.

1 La direzione della retta deve essere sia una direzione di π_1 che una direzione di π_2.

$$\begin{cases} 2x - y \quad = 0 & \longrightarrow \quad y = 2x \\ x \quad -z = 0 & \longrightarrow \quad z = x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}$$

NOTA: la direzione comune è esattamente la direzione della retta $\pi_1 \cap \pi_2$.

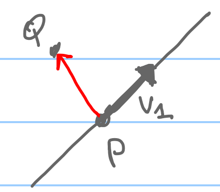
Prendiamo come direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Imponendo il passaggio per un punto di $(1,-1,2)+\langle(1,1,0)\rangle$, garantisco che le due rette siano complanari.

Scegliamo $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ES (a) piano contenente $(1,-1,2)+\langle(1,1,0)\rangle$ e il punto $(0,0,1)$.



il piano contiene il piano contiene anche $P+(Q-P)=Q$

$$P+\langle v_1, Q-P\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

(b) piano ortogonale a $(1,-1,2)+\langle(1,1,0)\rangle$ e passante per $(1,1,1)$.

Le direzioni del piano devono essere ortogonali alla direzione $\langle(1,1,0)\rangle$.

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle^{\perp}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

(c) retta di $(1,-1,1)+\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$, ortogonale a $(0,1,0)+\langle(1,1,1)\rangle$.

La direzione della retta deve essere un vettore di $\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$ ortogonale a $(1,1,1)$.

$v\in\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$ e imponiamo $v\cdot(1,1,1)=0$

$$v=\begin{pmatrix}a\\b\\a\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}a\\b\\a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2a+b=0 \iff b=-2a$$

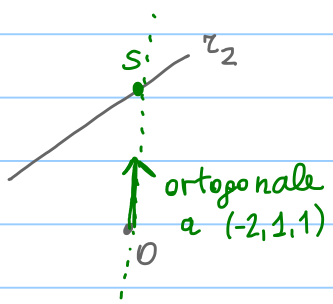
$$\iff v=a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

avremmo potuto prendere qualsiasi punto del piano

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

(Di tali rette, ce ne sono infinite)

(d) retta passante per $(0,0,0)$, ortogonale a $r_1:(1,-1,0)+\langle(-2,1,1)\rangle$ e che intersechi $r_2:(0,-2,0)+\langle(1,0,1)\rangle$.



Prendiamo un punto generico S di r_2 e imponiamo $(S-O)\perp(-2,1,1)$.

$$S=\begin{pmatrix}s\\-2\\s\end{pmatrix}\qquad S-O=\begin{pmatrix}s\\-2\\s\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\iff -2s-2+s=0$$

$$\iff s=-2$$

quindi prendiamo $s=-2$, $S=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

$$O+\langle S-O\rangle$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\right\rangle.$$