ORTOGONALITÀ

- $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0$
- T sottospazio di $\mathbb{R}^n$,
  $$T^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n : v \cdot t = 0 \ \forall t \in T \}$$
- Si dimostra che $T^\perp$ è un sottospazio e che $T \oplus T^\perp = \mathbb{R}^n$.
- Possiamo sempre definire la proiezione ortogonale su T, cioè la proiezione su T di direzione $T^\perp$.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortogonale di V
$\rightarrow v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j$

Sia $v \in V$, allora esistono $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ t.c.
$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n. \quad (*)$$

DOMANDA 1: Come trovare i coefficienti $\mu_1, \dots, \mu_n$?

In generale basta risolvere il sistema lineare dato da $(*)$, ma se la base è ortogonale possiamo fare meglio

$$\begin{aligned} v \cdot v_1 &= (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) \cdot v_1 \\ &= \mu_1 (v_1 \cdot v_1) + \mu_2 \underbrace{(v_2 \cdot v_1)}_{=0} + \dots + \mu_n \underbrace{(v_n \cdot v_1)}_{=0} \\ &= \mu_1 (v_1 \cdot v_1) \end{aligned}$$

perché la base è ortogonale

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$$

In generale $\mu_i = \dfrac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}$

prendiamo la componente lungo $\langle v_i \rangle$

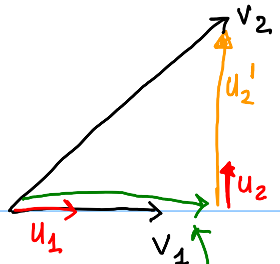
In particolare, $\pi^\perp_{\langle v_i \rangle}(v) = \mu_i v_i = \dfrac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i$

MORALE: Possiamo scrivere facilmente proiezioni ortogonali se conosciamo una base ortogonale dello spazio.

DOMANDA 2: Come possiamo trovare basi ortogonali di un sottospazio?
$\rightsquigarrow$ procedimento di G-S.

ESEMPIO $(n=2)$

Data $\{v_1, v_2\}$ base di V, vogliamo costruire una base ortonormale $\{u_1, u_2\}$ di V.



proiezione ortogonale di v_2 su $\langle u_1 \rangle$.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$u_2' = v_2 - \pi^{\perp}_{\langle u_1 \rangle}(v_2)$$

$$= v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1$$

$u_1 \cdot u_1 = 1$ perchè $\|u_1\| = 1$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$$

Se $n=3$, $u_3' = v_3 - \pi^{\perp}_{\langle u_1 \rangle}(v_3) - \pi^{\perp}_{\langle u_2 \rangle}(v_3) = v_3 - (v_3 \cdot u_1)\, u_1 - (v_3 \cdot u_2)\, u_2$

$u_3 = u_3' / \|u_3'\|$.

F10.1 Sia $U = \langle (1,1,1,1) \rangle \leq \mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una base ortogonale di U e $U^{\perp}$.

U: $v_1 = (1,1,1,1)$ $\quad s_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} = \frac{(1,1,1,1)}{2} = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

$U^{\perp}$: $U^{\perp} = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z,t) \cdot (1,1,1,1) = 0 \}$

$$= \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0 \}$$

$$= \langle \underset{w_1}{(-1,1,0,0)}, \underset{w_2}{(-1,0,1,0)}, \underset{w_3}{(-1,0,0,1)} \rangle.$$

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2' = w_2 - \pi^{\perp}_{\langle u_1 \rangle}(w_2) = w_2 - (w_2 \cdot u_1)\, u_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2'\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + 1} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3' = w_3 - \pi^{\perp}_{\langle u_1 \rangle}(w_3) - \pi^{\perp}_{\langle u_2 \rangle}(w_3) = w_3 - (w_3 \cdot u_1)\, u_1 - (w_3 \cdot u_2)\, u_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 1/2 + 1/6 \\ -1/2 + 1/6 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|u_3'\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{4/3}} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ è una base ortonormale di $U^{\perp}$.

(b) Determinare la matrice nelle basi canoniche della proiezione ortogonale su $U^{\perp}$.

METODO 1: cambiamento di base (stesso metodo usato per proiezioni qualsiasi)

Prendiamo $\mathcal{B} = \{ \underbrace{u_1, u_2, u_3}_{\text{base ortonormale di } U^{\perp}}, \overbrace{s_1}^{\text{base ortonormale di } U} \}$. Notiamo che $\mathcal{B}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi^{\perp}_{U^{\perp}}} = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\pi^{\perp}_{U^{\perp}}} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id}$$

$$= H \cdot A \cdot H^{-1}$$

$$H = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & s_1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che siccome $\mathcal{B}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^4$, allora $HH^t = I_4$ e quindi $H^{-1} = H^t$. Concludiamo $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi^{\perp}_{U^{\perp}}} = HAH^t$.

METODO 2: necessita di conoscere una base ortonormale dello spazio su cui si proietta.

$$U^\perp = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$\pi^\perp_{U^\perp}(v) = \pi^\perp_{\langle u_1, u_2, u_3\rangle}(v) = \pi^\perp_{\langle u_1\rangle}(v) + \pi^\perp_{\langle u_2\rangle}(v) + \pi^\perp_{\langle u_3\rangle}(v)$$

$$= (v\cdot u_1)\,u_1 + (v\cdot u_2)\,u_2 + (v\cdot u_3)\,u_3$$

NOTA Possiamo utilizzare questa formula (vedere calcoli sotto). Per ridurre i calcoli avremmo potuto calcolare prima la proiezione su U (che ha dimensione 1) usando la formula analoga, e poi trovare la proiezione su $U^\perp$ per differenza.

$$v = \pi^\perp_U(v) + \pi^\perp_{U^\perp}(v) \Rightarrow \pi^\perp_{U^\perp}(v) = v - \pi^\perp_U(v).$$

$$\pi^\perp_U(v) = \pi^\perp_{\langle s_1\rangle}(v) = (v\cdot s_1)\,s_1 = \left[\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/2\\ 1/2\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1/2\\ 1/2\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{a+b+c+d}{4}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$\pi^\perp_{U^\perp}(v) = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} - \frac{a+b+c+d}{4}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3a-b-c-d\\ -a+3b-c-d\\ -a-b+3c-d\\ -a-b-c+3d\end{pmatrix}$$

Prendiamo $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$\pi^\perp_{U^\perp}(v) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \left[\frac{1}{\sqrt{3/2}}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2\\ -1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{3/2}}\begin{pmatrix} -1/2\\ -1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$+ \left[\frac{1}{\sqrt{4/3}}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/3\\ -1/3\\ -1/3\\ 1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{4/3}}\begin{pmatrix} -1/3\\ -1/3\\ -1/3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(-a+b)\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \frac{1}{3/2}\left(-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+c\right)\begin{pmatrix} -1/2\\ -1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{4/3}\left(-\frac{a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}+d\right)\begin{pmatrix} -1/3\\ -1/3\\ -1/3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{b-a}{2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \frac{-a-b+2c}{3}\begin{pmatrix} -1/2\\ -1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \frac{-a-b-c+3d}{4}\begin{pmatrix} -1/3\\ -1/3\\ -1/3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} - \frac{-a-b+2c}{6} - \frac{-a-b-c+3d}{12} \\[2mm] \frac{b-a}{2} - \frac{-a-b+2c}{6} - \frac{-a-b-c+3d}{12} \\[2mm] \frac{-a-b+2c}{3} - \frac{-a-b-c+3d}{12} \\[2mm] \frac{-a-b-c+3d}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6a-6b+2a+2b-4c+a+b+c-3d}{12} \\[2mm] \frac{6b-6a+2a+2b-4c+a+b+c-3d}{12} \\[2mm] \frac{-4a-4b+8c+a+b+c-3d}{12} \\[2mm] \frac{-a-b-c+3d}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9a-3b-3c-3d}{12} \\[2mm] \frac{-3a+9b-3c-3d}{12} \\[2mm] \frac{-3a-3b+9c-3d}{12} \\[2mm] \frac{-a-b-c+3d}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3a-b-c-d \\ -a+3b-c-d \\ -a-b+3c-d \\ -a-b-c+3d \end{pmatrix}$$

METODO 3: non necessita di conoscere una base ortonormale.

$$U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^4$$

$$v = \underbrace{\pi^{\perp}_U(v)}_{\in U} + \underbrace{\pi^{\perp}_{U^{\perp}}(v)}_{\in U^{\perp}} \qquad v - \pi^{\perp}_U(v) = \pi^{\perp}_{U^{\perp}}(v) \in U^{\perp}$$

- $\pi^{\perp}_U(v)$ è un vettore di U, quindi $\pi^{\perp}_U(v) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v - \pi^{\perp}_U(v) \in U^{\perp} \iff \left(v - \pi^{\perp}_U(v)\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff a-\alpha+b-\alpha+c-\alpha+d-\alpha = 0$$

$$\iff \alpha = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Ricaviamo $\pi^{\perp}_{U^{\perp}}(v) = v - \pi^{\perp}_U(v) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \frac{a+b+c+d}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3a-b-c-d \\ -a+3b-c-d \\ -a-b+3c-d \\ -a-b-c+3d \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi^{\perp}_{U^{\perp}}} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

(c) Potevamo prevedere che $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi^{\perp}_{U^{\perp}}}$ fosse simmetrica?

A è simmetrica $\Leftrightarrow$ è ortogonalmente diagonalizzabile.

esiste una base ortogonale di autovettori.

$$\mathcal{B} = \{ \overbrace{\underbrace{u_1, u_2, u_3}_{\substack{\text{autovettori} \\ \text{di autovalore } 1}}, \underbrace{s_1}_{\substack{\text{autovettore} \\ \text{di autovalore } 0}}}^{\text{vettori ortogonali}} \}$$

infatti se $u \in U^{\perp}$ $\pi^{\perp}_{U^{\perp}}(u) = u$

infatti se $u \in U$ $\pi^{\perp}_{U}(u) = 0$.

$\mathcal{B}$ è base • ortogonale • di autovettori $\Rightarrow$ A deve essere simmetrica.

(d) Determinare la proiezione ortogonale su $U^{\perp}$ di $\langle e_1, e_4 \rangle$.

$$\pi^{\perp}_{U^{\perp}}(\langle e_1, e_4 \rangle) = \langle \pi^{\perp}_{U^{\perp}}(e_1), \pi^{\perp}_{U^{\perp}}(e_4) \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ESERCIZIO Sia $v = (2,4,2)$. Trovare $V \leq \mathbb{R}^3$ con $\dim V = 2$ t.c. $\pi^{\perp}_{V}(v) = (2,1,-1)$.

$$v = \pi^{\perp}_{V}(v) + \pi^{\perp}_{V^{\perp}}(v) \Rightarrow \pi^{\perp}_{V^{\perp}}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in V^{\perp} \quad (1)$$

Dato che $\dim V = 2$, $\dim V^{\perp} = 1$. (2)

$(1) + (2) \Rightarrow V^{\perp} = \langle (0,3,3) \rangle$

$$\Rightarrow V = (V^{\perp})^{\perp} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \cdot (0,3,3) = 0 \}$$
$$= \{ \quad " \quad : 3y + 3z = 0 \}$$
$$= \langle (1,0,0), (0,1,-1) \rangle.$$