EALG - Tutorato 8

Titolo nota 10/05/2022

A diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esistono H invertibile e D diagonale t.c.

$$D = H^{-1} \cdot A \cdot H$$

F9.6 Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k-4 & -1 \\ k-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per quali $k \in \mathbb{R}$, il vettore $v = (1,0,-1)$ è autovettore di A_k?
Stessa richiesta per $w = (1,-1,-1)$.

v è autovettore di $A_k \Leftrightarrow A_k \cdot v = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A_k \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2k-4 & -1 \\ k-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ k-2 \\ -2 \end{pmatrix} \overset{\text{imponiamo } =\lambda v}{=} \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 = \lambda \\ k-2 = 0 \\ -2 = -\lambda \end{cases} \qquad k = 2, \quad \lambda = 2$$

v è autovettore di $A_k \Leftrightarrow k = 2$. In tal caso, l'autovalore corrispondente è $\lambda = 2$.

$$A_k \cdot w = \begin{pmatrix} 1 & 2k-4 & -1 \\ k-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2k+4+1 \\ k-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2k \\ k-2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6-2k = \lambda & \to 6 = 2 \text{ falso} \\ k-2 = -\lambda & \to k-2 = -2 \to k = 0 \\ -2 = -\lambda & \to \lambda = 2 \end{cases}$$

il sistema non ha soluzione, quindi w non è MAI autovettore di A_k.

(b) Per quali k, 0 è autovalore di A_k?

λ è autovalore di $A_k \Leftrightarrow \lambda$ è radice di $p_{A_k}(x) = \det(A_k - xI)$

0 è autovalore di $A_k \Leftrightarrow p_{A_k}(0) = 0 \Leftrightarrow \det(A_k - 0 \cdot I) = 0 \Leftrightarrow \det(A_k) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2k-4 & -1 \\ k-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(k-2) \det \begin{pmatrix} 2k-4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -(k-2)(2k-4)$$

$\det A_k = 0 \Leftrightarrow (k-2)(2k-4) = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

1c) Determinare se A_2 è diag. e, se possibile, trovare H invertibile e D diagonale t.c. $D = H^{-1} A_2 H$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{A_2}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = -x \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= -x \left((1-x)^2 - 1 \right)$$

$$= -x \left(1 - 2x + x^2 - 1 \right)$$

$$= -x \left(x^2 - 2x \right)$$

$$= -x^2 (x-2).$$

Le radici di $-x^2(x-2)$ sono $x=0$ e $x=2$.

$\lambda_1 = 2$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2 = 0$

m.a. $= 1$ $\qquad\qquad$ m.a. $= 2$ $\quad$ non possiamo concludere nulla a priori sulla m.g. di $\lambda_2 = 0$.

$\Rightarrow$ m.g. $= 1$

$$\text{m.g.}(\lambda) = \dim V_\lambda \qquad V_\lambda = \ker(A_2 - \lambda I)$$

$w_1 = -w_3$

$$V_0 = \ker(A_2 - 0 \cdot I) = \ker(A_2) = \ker \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\text{rk}(A_2) = 1$$

$$\dim(\ker(A_2)) = 3 - \text{rk}(A_2) = 2$$

$\Rightarrow$ m.g. $= 2$

Dato che m.a(λ) = m.g.(λ) per ogni autovalore λ, possiamo concludere che A è diagonalizzabile.

Ora troviamo D e H.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$

$$V_2 = \ker(A_2 - 2I)$$

$$= \ker \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\lambda = 0$

$$V_0 = \ker(A_2 - 0 \cdot I)$$

$$= \ker \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$w_1 \quad w_2 \quad w_3$

$w_1 - w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (1,0,-1) \in V_2$

$w_1 + w_3 = 0 \Rightarrow (1,0,1) \in V_0$

$w_2 = 0 \Rightarrow (0,1,0) \in V_0$

colonne = autovettori (presi nell'ordine corrispondente a quello scelto per D)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

autovettore di $\lambda = 2$

autovettori di $\lambda = 0$

Con questa scelta, $D = H^{-1} A_2 H$

NOTA: A meno che non venga richiesto esplicitamente, NON serve calcolare H^{-1}.

NOTA: A cosa corrisponde la diagonalizzazione di una matrice nel linguaggio delle applicazioni lineari?

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\mathbb{R}^3$

$H = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \qquad A_2 = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} \qquad H^{-1} = A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id}$

$$D = H^{-1} A_2 H = A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id}$$

$$= A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi}$$

La matrice di ϕ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia sul dominio che sul codominio è diagonale.

(d) Trovare tutti gli autovettori di A_2 appartenenti a $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$

Autovettori di $A_2 = V_2 \cup V_0$ quindi gli autovettori cercati sono $(V_2 \cup V_0) \cap W = (V_2 \cap W) \cup (V_0 \cap W)$

$V_2 \cap W$:

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$v \in V_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$ che appartiene anche a W.

$V_2 \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$V_0 \cap W$:

$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$v \in V_0 \iff v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \in W \iff b = 0$$

$$V_0 \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(V_0 \cup V_2) \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

★ L'insieme richiesto è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
NON $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ come erroneamente detto a lezione.

(e) Per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$B_{h,k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h+1 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è simile alla matrice A_2. Per tali valori, trovare M invertibile t.c. $B_{h,k} = M^{-1} A_2 M$

① Dato che A_2 è diagon., se $B_{h,k}$ è simile ad A_2 allora $B_{h,k}$ deve essere diagonalizzabile.

② Due matrici diagonalizzabili sono simili $\iff$ hanno la stessa forma diagonale.

①+②: $B_{h,k}$ è simile ad A_2 $\iff$ $B_{h,k}$ è diag. e la sua forma diagonale è $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

$$p_{B_{h,k}}(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ h+1 & k-x & 0 \\ 2 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

$$= -x \det \begin{pmatrix} k-x & 0 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 (k-x)$$

Le radici di $p_{B_{h,k}}(x)$ sono 0 e k. Se $B_{h,k}$ è simile ad A_2, allora 2 deve essere un autovalore di $B_{h,k}$, quindi dobbiamo prendere $k=2$.

$\lambda = 2$ | $\lambda = 0$

m.a. $= 1 \Rightarrow$ m.g. $= 1$ | m.a. $= 2$

$$V_0 = \ker (B_{h,2} - 0 \cdot I)$$

$$= \ker \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h+1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} w_1 & \;\; w_2 & \;\; w_3 \end{matrix} \end{array}$$

$W_3 = 0$

W_1 e W_2 sono dip. $\Leftrightarrow$ sono uno multiplo dell'altro $\Leftrightarrow h = 3$.

$$rk(B_{h,2}) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = 3 \\ 2 & \text{se } h \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \dim V_0 = \begin{cases} 2 & \text{se } h = 3 \\ 1 & \text{se } h \neq 3 \end{cases}$$

$h = 3 \quad m.g. = 2 \quad \Rightarrow \quad m.a. = m.g.$

$h \neq 3 \quad m.g. = 1 \quad \Rightarrow \quad m.a. \neq m.g.$

$B_{h,2}$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow h = 3$.

$B_{h,k}$ è diag. e ha forma diag. $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow k = 2,\ h = 3$

$B_{h,k}$ è simile ad $A_2 \Leftrightarrow k = 2,\ h = 3$.

Troviamo M invertibile t.c. $B_{3,2} = M^{-1} A_2 M$.

$D = H^{-1} A_2 H$

$D = H_1^{-1} B_{3,2} H_1$

$\Rightarrow$

$$H_1^{-1} \underline{B_{3,2}} H_1 = D = H^{-1} A_2 H$$

$$H_1 H_1^{-1} B_{3,2} H_1 H_1^{-1} = H_1 H^{-1} A_2 H H_1^{-1}$$

$$B_{3,2} = H_1 H^{-1} A_2 H H_1^{-1}$$

$$= (H H_1^{-1})^{-1} A_2 (H H_1^{-1})$$

$$= M^{-1} A_2 M$$

dove $M = H H_1^{-1}$

Troviamo H_1

$\lambda = 2$

$V_2 = \ker(B_{3,2} - 2 \cdot I)$

$$= \ker \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} W_1 & W_2 & W_3 \end{matrix} \end{array} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\rightarrow 2W_2 + W_3 = 0$

$\Rightarrow (0, 2, 1) \in V_2$

$\lambda = 0$

$V_0 = \ker(B_{3,2} - 0 \cdot I)$

$$= \ker \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} W_1 & W_2 & W_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$W_1 - 2W_2 = 0 \Rightarrow (1, -2, 0) \in V_0$

$W_3 = 0 \Rightarrow (0, 0, 1) \in V_0$

(★) La combinazione corretta è $2W_2 + W_3 = 0$, NON $-2W_2 + W_3 = 0$ come erroneamente detto a lezione. Quindi il vettore da

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

prendere è $(0,2,1)$.

Ora basta calcolare $M = H \cdot H_1^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$= \ldots\ldots$