F6.5 (E) Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ applicazione lineare di matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-3 & k & k^2-1 \\ 2 & k-2 & k-1 \\ \underbrace{0}_{f_k(e_1)} & \underbrace{0}_{f_k(e_2)} & \underbrace{1}_{f_k(e_3)} \end{pmatrix}$$

$$f_k(e_1) + f_k(e_2) = \begin{pmatrix} 2k-3 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\| \quad f_k(e_1 + e_2)$$

Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ t.c.

$$A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}, f_k} = \begin{pmatrix} 2k-3 & k & k^2-1 \\ k & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo trovare $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$ t.c.

$$A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}, f_k} = \begin{pmatrix} f_k(v_1) & f_k(v_2) & f_k(v_3) \end{pmatrix}$$

Vogliamo $f_k(v_3) = \begin{pmatrix} k^2-1 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_k(e_3) \Rightarrow$ possiamo scegliere $v_3 = e_3$

Analogamente possiamo scegliere $v_2 = e_2$.

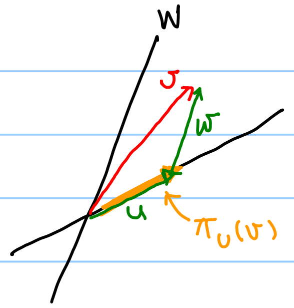
Dato che $f_k(e_1+e_2) = \begin{pmatrix} 2k-3 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, possiamo scegliere $v_1 = e_1 + e_2$.

Alternativamente, avremmo potuto risolvere il sistema $A_k \cdot x = \begin{pmatrix} 2k-3 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\{e_1+e_2, e_2, e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, quindi è una buona scelta.

PROIEZIONI / SIMMETRIE

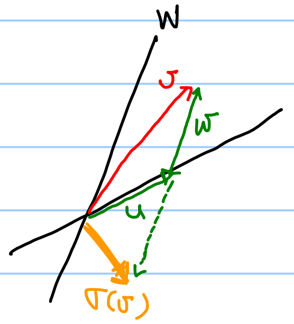
Siano U, W sottospazi di V t.c. $U \oplus W = V$.



Dato $v \in V$, v si decompone in modo unico nella forma $v = u + w$ $u \in U$, $w \in W$.

Definiamo la proiezione su U parallelamente a W

$$\pi_U(v) = u$$



Definiamo la simmetria di asse U lungo W

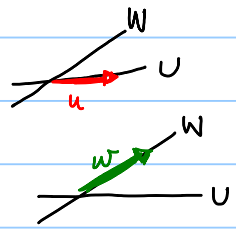
$$\sigma(v) = u - w$$

Sia $\{u_1, \dots, u_m\}$ base di U e sia $\{w_1, \dots, w_{m'}\}$ base di W.
Allora $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_{m'}\}$ è una base di V.

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\pi_U} = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\quad}^{U}\ \overbrace{\qquad\quad}^{W} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots\ 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$u \in U$ $\quad \pi_U(u) = u$

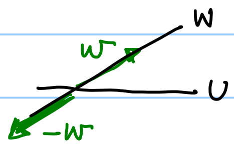
$w \in W$ $\quad \pi_U(w) = 0$



$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\sigma_{\text{asse } U}} = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\quad}^{U}\ \overbrace{\qquad\quad}^{W} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots\ 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$u \in U$ $\quad \sigma(u) = u$

$w \in W$ $\quad \sigma(w) = -w$



F8.5 Siano $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(a) Verificare che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

$\dim U = 2$, $\dim W = 1$, quindi basta verificare che $U \cap W = \langle 0 \rangle$.

1° modo $\quad a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a \quad -2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b = -a/2 \\ a + b + c = a - a/2 + a/2 = 0 \\ c = a/2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow b = 0 \\ \Rightarrow a = 0 \\ \Rightarrow c = 0 \end{array}$$

quindi i tre vettori sono indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}^3$.

2° modo $\quad$ Possiamo usare il determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -2-2(-2-1) = -2+6 = 4 \neq 0$$

quindi i tre vettori sono lin. indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Scrivere la matrice rispetto alle basi canoniche della simmetria di asse U e direzione W.

Conviene usare la base $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$\sigma(u) = u \quad \forall u \in U$

$\sigma(w) = -w \quad \forall w \in W$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO: $\sigma(u_1) = u_1$ e le coordinate nella base $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vogliamo ottenere $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\sigma}$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\sigma} = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\sigma} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id}$$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id} = \left(A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id}\right)^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ -II \\ III-II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ III/(-4) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ II+III \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} I-2II \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{I} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

dopo qualche conto

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

DIAGONALIZZAZIONE

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ è diag. $\Leftrightarrow$ Esistono D diagonale, H invertibile t.c. $D = H^{-1} A H$

Supponiamo $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ con ϕ lineare
$H = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id}$ dove i vettori di $\mathcal{B}$ sono le colonne di H

$$D = H^{-1} A H = A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id}$$
$$= A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi}$$

A è diag. $\Leftrightarrow$ la matrice di ϕ rispetto ad un'opportuna base è diagonale.

base $\mathcal{B}$ (base di autovettori)

A è diag. su $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ (i) $p_A(t) = \det(A - tI)$ ha tutte le radici reali.
(ii) per ogni autovalore λ, $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.

dove $ma(\lambda)$ = massima potenza di $(t-\lambda)$ che divide $p_A(t)$
$mg(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I))$.

Per ogni autovalore λ, vale $1 \le mg(\lambda) \le ma(\lambda)$. In particolare, se $ma(\lambda) = 1$, allora $mg(\lambda) = 1$ e quindi $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.

ESERCIZIO Stabilire se le seguenti matrici siano diagonalizzabili.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_C(t) = \det(C - tI) = \det\begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix}$$
$$= (3-t)^2 + 1 = t^2 - 6t + 10$$

$\Delta = (-6)^2 - 4\cdot(10) = 36 - 40 = -4 < 0$ quindi le radici NON sono reali.

La matrice C NON è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

F9.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (1-t)\det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= -\left(1-t-1\right) + (1-t)\left((1-t)^2 - 1\right)$$

$$= t + (1-t)(t^2-2t) = t\left(1 + (1-t)(t-2)\right) = t\left(-t^2+3t-1\right)$$

$$= -t\,(t^2-3t+1)$$

$$p_A(t) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ t^2-3t+1 = 0 \qquad \Delta = 9-4 = 5 \qquad t_{1/2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$p_A(t) = -t\left(t - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

(i) Le radici di $p_A(t)$ sono $0, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ sono tutte reali

(ii) $ma(0) = 1 \Rightarrow mg(0) = 1 \Rightarrow ma(0) = mg(0)$.
allo stesso modo per gli altri due autovalori, $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.

Concludiamo che la matrice è diagonalizzabile.

F9.3(E) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_E(t) = \det(E - tI) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 & 5 \\ 0 & -t & 3 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)\det\begin{pmatrix} -t & 3 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= -t\,(1-t)^2.$$

(i) le radici di $p_E(t)$ sono $t=0$, $t=1$ e sono tutte reali.

(ii) $t = 0$: $ma(0) = 1$ $\Rightarrow mg(0) = 1$

$t = 1$: $ma(1) = 2$

$mg(1) = \dim\left(\ker(A - 1\cdot I)\right)$

$$A - 1\cdot I = \begin{array}{ccc} x & & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(A - I) = 2$

$\Rightarrow \dim(\ker(A-I)) = 3-2 = 1.$

$mg(1) = 1 \neq 2 = ma(1)$

Concludiamo che E NON è diagonalizzabile.

⚠ Quando $ma(\lambda) > 1$, non possiamo concludere nulla a priori.

$$E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_{E'}(t) = -t(1-t)^2$$

- E' ha lo stesso polinomio caratteristico di E;
- E' è diagonalizzabile (è già in forma diagonale);
- E non è diag.